二重积分的概念．（大化小、常代变、近似和、取极限）

$\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$

（d_i为σ_i直径）

$\downarrow$

D分成n个小区域 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$

定义1：$f(x,y)$为定义在可求面积的有界闭区域D上的函数，J为一个确定的数．若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. 任何分割$T\subset D$，当它的细度$\|T\|<\delta$时，属于T的所有积分和都有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i - J\right| < \varepsilon$$

则称$f(x,y)$在D上可积，数J → 函数$f(x,y)$在D上的二重积分．

记：$J=\iint\limits_D f(x,y)\,\underset{\Delta x\Delta y}{\underset{\downarrow}{d\sigma}} = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

特殊地，$f(x,y)=1$时，二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$值等于积分区域D的面积

$\to$ $f(x,y)$为被积函数，x,y为积分变量，D为积分区域．

<几何应用> $f(x,y)\geq 0$时，二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$就表示以$z=f(x,y)$为曲顶，D为底的曲顶柱体的体积．

定义2：设$f(x,y)$在D上有界，T为D的一个分割，它把D分成n个可求面积的小区域$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$．令

$$M_i=\sup_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y),\qquad m_i=\inf_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)\qquad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

$f(x,y)$关于分割T的 $\begin{cases}\text{上和} & S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i\\ \text{下和} & s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i\end{cases}$

$\to$ 振幅：$\omega_i=\sup\limits_{(x,y)(x',y')\in\Delta\sigma_i}|f(x,y)-f(x',y')|$

$\longrightarrow$ 可积性 $\leftarrow$ $\sum\omega_i<\varepsilon$

定理1：$f(x,y)$在D上可积的充要条件：$\lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T)=\lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T)$

定理2：$f(x,y)$在D上可积的充要条件：$\forall\varepsilon>0$，$\exists T$，s.t. $S(T)-s(T)<\varepsilon$．

定理3：有界闭区域D上的连续函数必可积．

定理4：设$f(x,y)$在有界闭域D上有界，且其不连续点集E是零面积集，则$f(x,y)$在D上可积

可积函数类（充分条件）$\begin{cases}\text{① 有界闭区域上的连续函数类}\\ \text{② 在闭域上有界，但不连续点集为零测集}\end{cases}$ → 面积为0（点/线）

二重积分的性质.

1. $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

2. $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

3. $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$. ($D_1$与$D_2$无公共内点).

4. $f(x,y) \le g(x,y)$, $(x,y) \in D$.
$\rightarrow \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

5. $\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$

6. $m \le f(x,y) \le M$. $(x,y) \in D$
$\rightarrow mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$.

S_D为积分区域D的面积.

7. <中值定理>. 若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续, 则$\exists(\xi,\eta) \in D$.
s.t. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)S_D$.

直角坐标系下二重积分的计算. →化为累次积分.

定理1: 设 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对每个 $x\in[a,b]$ ($y\in[a,b]$), 积分 $\int_c^d f(x,y)\,dy$ ($\int_a^b f(x,y)\,dx$) 存在. 则累次积分 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$ ($\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$) 也存在.

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

定义1:
x 型点集: 平面点集 $D=\{(x,y)\mid y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$
y 型点集: 平面点集 $D=\{(x,y)\mid x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\}$

特点: 当 D 为 x (y) 型区域时, 垂直于 x (y) 轴的直线 $x=x_0\ (a<x_0<b)$ ($y=y_0\ (c<y_0<d)$) 至多与区域 D 的边界交于两点.

定理2: 若 $f(x,y)$ 在 x (y) 型区域 D 上连续, 其中 $y_1(x)$, $y_2(x)$ ($x_1(y)$, $x_2(y)$) 在 $[a,b]$ ($[c,d]$) 上连续, 则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

格林公式·曲线积分与路径无关性.

定理1.<格林公式>:若 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在闭区域D上连续,且有连续的一阶偏导数.

则有: $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\oint_L Pdx+Qdy$.

L为区域D的边界曲线、分段光滑.并取正方向. → 逆时针

<边界曲线正方向的规定>→ 当人沿边界行走时,区域D总在他的左边.

与上述规定方向相反的方向即为负方向、记为-L.

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} d\sigma=\oint_L Pdx+Qdy$$

<单连通区域→没有洞的区域;复连通区域→有洞的区域>

定理2:设D为单连通区域.若函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在D内连续,且具有一阶连续偏导、则下列四条件等价:

① 沿D内任一按段光滑封闭曲线L.有 $\oint_L Pdx+Qdy=0$

② 对于D中任一按段光滑曲线L,曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路线无关、只与L的起点及终点有关

③ $Pdx+Qdy$ 是D内某一函数 $u(x,y)$ 的全微分.即在D内有:

$$du=Pdx+Qdy.$$

④ 在D内处处成立: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

二重积分的变量变换.

定理1：设$f(x,y)$在有界闭区域D上可积，变换T：$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$将uv平面由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域△一对一地映成xy平面上的闭区域D、函数$x(u,v)$、$y(u,v)$在△内分别具有一阶连续偏导，且它们的函数行列式：

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,\quad (u,v)\in\Delta.$$

则 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$.

<解题方法> 极坐标变换（适用于积分区域为圆域或圆域的一部分，或被积函数形式为$f(x^2+y^2)$）

→ 广义极坐标变换 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$ $0\le r<+\infty$，$0\le\theta\le2\pi$. $\langle J(r,\theta)=abr\rangle$

→ 变换(T) $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $0\le r<+\infty$，$0\le\theta\le2\pi$.

↓

函数行列式：$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$

定理2：设$f(x,y)$满足定理1条件，且在极坐标变换下，xy平面上有界闭区域D与rθ平面上区域△对应，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$.

极坐标系下，二重→累次

(i)、<0∉D> xy平面上射线θ=常数与D的边界至多交于两点，则 $\underset{\Delta}{\underline{r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)}}$ $\quad\alpha\le\theta\le\beta$

→ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$.

同理.

<0∉D> xy平面上的圆r=常数与D的边界至多交于两点，则 $\underset{\Delta}{\underline{\theta_1(r)\le\theta\le\theta_2(r)}}$ $\quad r_1\le r\le r_2$

→ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{r_1}^{r_2}r\,dr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta$.

(ii) <0∈D，为内点> D的边界极坐标方程为$r=r(\theta)$，则 $\underset{\Delta}{\underline{0\le r\le r(\theta),\ 0\le\theta\le2\pi}}$.

→ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$.

(iii) <0为D边界点> 则 $\underset{\Delta}{\underline{0\le r\le r(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta}}$.

→ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$

No.

Date 三重积分.

定义1：设$f(x,y,z)$为定义在三维空间可求体积的有界闭区域V上的函数，J是一个确定的数，若$\forall \varepsilon>0$、$\exists \delta>0$，st 对于V的任何T，只要$\|T\|<\delta$，属于分割T的所有积分和都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i - J\right| < \varepsilon.$$

则称$f(x,y,z)$在V上可积，称J：$f(x,y,z)$在V的三重积分。

记：$J=\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$、或$J=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$.

其中．$f(x,y,z)$为被积函数；x,y,z为积分变量；V为积分区域.

< $f(x,y,z)\equiv 1$时、$\iiint\limits_V dV$ 几何上表示V的体积>.

<类似性质> 可积（充分条件）$\begin{cases} ①有界闭区域上的连续函数类 \\ ②闭区域上有界．间断点集中在有限多个零体积曲面上 \end{cases}$

定理1：若$f(x,y,z)$在长方体$V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$上的三重积分存在，且$\forall (x,y)\in D$，$D=[a,b]\times[c,d]$，$g(x,y)=\int_e^h f(x,y,z)dz$存在，则积分$\iint\limits_D g(x,y)dxdy$也存在，且

先一后二．

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_e^h f(x,y,z)dz.$$

<推论> 若$V=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D, z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}\subset[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$，其中$D$为$V$在$Oxy$平面上的投影，$z_1(x,y)$、$z_2(x,y)$为$D$上的连续函数．函数$f(x,y,z)$在$V$上的三重积分存在，且$\forall (x,y)\in D$，$G(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$亦存在．

则．$\iint\limits_D G(x,y)dxdy$存在．且．

先二后一．

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D G(x,y)dxdy=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

定理2：若$f(x,y,z)$在长方体$V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$上的三重积分存在，且$\forall z\in[e,h]$，二重积分$I(z)=\iint\limits_D f(x,y,z)dxdy$存在，其中$D=[a,b]\times[c,d]$．

则．$\int_e^h dz\iint\limits_D f(x,y,z)dxdy$也存在．且．$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_e^h dz\iint\limits_D f(x,y,z)dxdy$.

Campus

<推论>.

若 $V\subset[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$，函数 $f(x,y,z)$ 在V上的三重积分存在，且 $\forall z\in[e,h]$，

积分 $\varphi(z)=\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$ 存在，D_z 为截面 $\{(x,y)\mid(x,y,z)\in V\}$。

则 $\int_e^h\varphi(z)dz$ 存在，且 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_e^h\varphi(z)dz=\int_e^h dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$.

换元 → 变换 $T: x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$. $\langle V\to V'\rangle$

设函数行列式：

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0.$$

$$\to\iiint\limits_V \underbrace{f(x,y,z)\,dxdydz}_{V上的积}=\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dudvdw.$$

常见换元：1. 柱面坐标换元. $T=\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ $\quad 0\le r<+\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\infty<z<+\infty$

广义柱坐标 T. $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ ↓ $J(r,\theta,z)=abr$

$$\to J(r,\theta,z)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\cos\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r.$$

$$\to\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdy=\iiint\limits_{V'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

→ 找V在xy平面上的投影区域D.

当 $V=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D\}$ 时.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\underline{\iint\limits_D dxdy}\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

用极坐标计算

2. 球坐标变换. $T=\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\theta\end{cases}$ $\quad 0\le r<+\infty,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$.

广义 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$ ↓ $J(r,\varphi,\theta)=abcr^2\sin\varphi$.

$$\to J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\varphi.$$

$$\to\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

↪ 区域 V' 为 $V' = \{(r, \varphi, \theta) \mid r_1(\varphi, \theta) \le r \le r_2(\varphi, \theta),\ \varphi_1(\theta) \le \varphi \le \varphi_2(\theta),\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$.

有: $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2 \sin\varphi\, dr$.

重积分的应用

<曲面的面积>→ 讨论由方程 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 确定的曲面S的面积 ΔS

① 大化小（D分成小区域） ② 常代变（小区域上某点处切平面面积）→ A_i
→ 投影与小区域曲面投影

③ 近似和（小区域求和Σ） ④ 取极限（小区域 $\|T\|\to 0$）

→ 曲面S在 $A_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 处切平面与z轴夹角 γ 的余弦：

$$|\cos\gamma_i| = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}}$$

→ A_i（小区域）在xy平面上投影为 σ_i.

则 $$\Delta S = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\,\Delta\sigma_i$$

$$=\iint_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,dxdy$$

$$\rightarrow \Delta S = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|} = \iint_D \frac{dxdy}{|\cos(\hat{\vec{n},z})|}$$

曲面法向量 $\vec{n}$ 与z轴正向夹角的余弦

<质心>：V是密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 的空间物体，$\rho(x,y,z)$ 在V上连续.

求V的质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

① 大化小（分小块 $\underbrace{\text{<体积>}}_{\Delta V_i}$） ② 常代变（小块体积用 $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ 代替）

③ 把每一小块都看作质量集中在 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的质点.

<质点系质心坐标>→ $$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i},$$

$$\bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i},\quad \bar{z}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}$$

④ 取极限（$\|T\|\to 0$）

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\rho(x,y,z)dV}{\iiint_V \rho(x,y,z)dV},\quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y\rho(x,y,z)dV}{\iiint_V \rho(x,y,z)dV},\quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z\rho(x,y,z)dV}{\iiint_V \rho(x,y,z)dV}$$

<若物体V密度均匀，为ρ（常数）时>.

$$\bar{x} = \frac{1}{\Delta V}\iiint_V x\,dV,\quad \bar{y} = \frac{1}{\Delta V}\iiint_V y\,dV,\quad \bar{z} = \frac{1}{\Delta V}\iiint_V z\,dV.$$

No.

Date

同理 → 密度分布为$\rho(x,y)$的平面薄板D的质心坐标：

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,d\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,d\sigma}$$

<若平面薄板D的密度均匀、为ρ(常数)时>:

$$\bar{x}=\frac{1}{\Delta_D}\iint\limits_D x\,d\sigma,\quad \bar{y}=\frac{1}{\Delta_D}\iint\limits_D y\,d\sigma.$$

<转动惯量> → 质点A对于轴l的转动惯量J是质点A的质量m和A与转动轴l的距离r的平方的乘积 $<J=mr^2>$

讨论空间物体V的转动惯量问题：

设$\rho(x,y,z)$为空间物体V的密度分布函数，在V上连续.

① 大化小(分割为n个小体积Δv_i) → v_i上任取点(ξ_i,η_i,ζ_i)

② 常代变(v_i的质量用$\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$近似代替) → 用质点系$\{(\xi_i,\eta_i,\zeta_i),i=1,2,\dots,n\}$近似代替$V$.

③ 质点系对于x轴的转动惯量则为：(近似和)

$$J_{x_n}=\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^2+\zeta_i^2)\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

④ 取极限 → ($\|T\|\to 0$) 物体V对x轴的转动惯量.

$$J_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV.$$

同理：物体V对轴的转动惯量：

$$J_y=\iiint\limits_V (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\,dV.\qquad J_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV.$$

物体V对平面的转动惯量：

$$J_{xy}=\iiint\limits_V z^2\rho(x,y,z)\,dV.\quad J_{yz}=\iiint\limits_V x^2\rho(x,y,z)\,dV.\quad J_{zx}=\iiint\limits_V y^2\rho(x,y,z)\,dV.$$

⟶ 平面薄板对坐标轴的转动惯量：

$$J_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\,d\sigma.\qquad J_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\,d\sigma.$$

⟶ 令l为转动轴、$r(x,y)$为D中点(x,y)到l的距离函数.

$$J_l=\iint\limits_D r^2(x,y)\rho(x,y)\,d\sigma.$$

No.

Date

<引力>→ 求密度为$\rho(x,y,z)$的立体对立体外质量为1的质点A的引力.

令$A(\xi,\eta,\zeta)$. V中点的坐标用(x,y,z)表示.

(微元法)→ V中质量微元 $dm=\rho dV$ 对A的引力在坐标轴上投影:

$$dF_x=k\frac{x-\xi}{r^3}\rho dV,\quad dF_y=k\frac{y-\eta}{r^3}\rho dV,\quad dF_z=k\frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV.$$

引力常数

→ $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ → A到dV的距离.

→ 力F在三个坐标轴上投影分别为:

$$F_x=k\iiint\limits_V\frac{x-\xi}{r^3}\rho dV,\quad F_y=k\iiint\limits_V\frac{y-\eta}{r^3}\rho dV,\quad F_z=k\iiint\limits_V\frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV.$$

→ $F=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$