讨论班讲义: 有限群的线性表示

毛芮桓

2023 年 1 月 7 日

讲义参考丘维生《群表示论》, 目前只更新到讨论班讲过的内容.

目录

Chapter 0

部分预备知识

本章作为前置章节, 用来处理我们在高等代数和抽象代数课程中未学过的基本知识.

0.1 笛卡尔积

我们首先将笛卡尔积推广至任意数量的集合.

定义 0.1.1 设 $\{A_i, i \in I\}$ 为一族集合, 其中集合 I 为指标集, 定义

$$A := \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i | f(i) \in A_i, i \in I \right\},$$

集合 A 称为 $\{A_i, i \in I\}$ 的笛卡尔积, 记作 $A = \prod_{i\in I} A_i$.

注意到,A 中的元素是从 I 映射到 $\bigcup_{i\in I} A_i$ 的函数 f, 且 f 将 i 映入 A_i 之中. 由此我们可以用另一种方式表示 A 中的元素, 对 $f \in A$, 令 $x_i = f(i)$,, 我们记 $f = \{x_i\}_{i\in I}$, 即用 f 在每个 i 处的像表示 f. 由于 $f = g$ 当且仅当对每个 i 均有 $f(i) = g(i)$, 于是该表示不会引起歧义. 以后我们将会灵活使用两种表示.

我们说该定义推广了通常的笛卡尔积的定义, 实际上, 当 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ 为有限指标集时, 考虑定义 0.1.1 中的积 $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ 与通常的定义

$$A' := \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in A_i\},$$

我们将 A 中的元素写作 $\{x_i\}_{i\in I}$, 注意到 $x_i = f(i) \in A_i$, 于是 A 与 A' 在双射

$$\sigma : \{x_i\}_{i\in I} \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

下是一致的.

一个显然的结论是

定理 0.1.1 设 $\{A_i, i \in I\}$ 为一族集合, 其中集合 I 为指标集, 若笛卡尔积 $A = \prod_{i\in I} A_i$ 非空, 则每个 A_i 均非空.

证要: 取 $f \in A$, 则 $f(i) \in A_i$, 故 A_i 非空.

我们将这个结论单独拿出来, 是因为它的逆命题十分重要, 它与我们在下一节中介绍的选择公理等价.

0.2 选择公理

本章介绍选择公理、Zorn 引理与良序原理, 并证明它们与定理 0.1.1 的逆命题是互相等价的.

不过这个讲义中应用地最多得还是 Zorn 引理.

选择公理 如果 A 是非空集合, 用 $P(A)^{\#}$ 表示 A 的一切非空子集组成的集合, 那么存在函数 $\beta : P(A)^{\#} \to A$ 使得对 A 的每个非空子集 S,$\beta(S) \in S$.

我们将这样的函数 β 称为选择函数. 选择公理简单地叙述就是非空集合的选择函数一定存在.

选择公理本身有多种叙述方式, 我们给出:

定理 0.2.1 选择公理成立当且仅当非空集合族 $\{A_i, i \in I\}$ 的笛卡尔积 $\prod_{i\in I} A_i$ 非空.

证要: 假定选择公理成立, 欲证 $\prod_{i\in I} A_i$ 非空, 只需找到一个函数 $f : I \to A = \bigcup_{i\in I} A_i$ 满足 $f(i) \in A_i$ 即可. 现在有函数 $\varphi : I \to P(A)^{\#}$ 满足 $\varphi(i) = A_i$, 设 $\beta : P(A)^{\#} \to A$ 是选择函数, 那么 $f = \beta\varphi$ 满足 $f(i) = \beta(A_i) \in A_i$, 于是 f 就是我们要找的函数.

现在假定非空集合的笛卡尔积非空, 那么对非空集合 A, 令 $I = P(A)^{\#}$, 据假设,$\prod_{S\in I} S$ 非空, 故它包含一个元素 β, 于是 $\beta(S) \in S$, 故 β 就是我们要找的选择函数.

为了叙述其他定理, 我们需要给出一些定义.

定义 0.2.1 设定义在集合 X 上的二元关系 $\preceq$ 如果满足:

(1) 自反性:$x \preceq x, \forall x \in X$;

(2) 反对称: 若 $x \preceq y$ 且 $y \preceq x$, 则 $x = y$;

(3) 传递性: 若 $x \preceq y, y \preceq z$, 则 $x \preceq z$;

则称 $\preceq$ 是 X 上的偏序关系, 称 $(X, \preceq)$ 是一个偏序集.

若 $x \preceq y$ 且 $x \neq y$, 那么记作 $x \prec y$.

定义 0.2.2 设 X 是偏序集, 如果 X 的每一个非空子集 S 都包含一个最小元 s_0, 即 $s_0 \in S$ 且 $\forall s \in S, s_0 \preceq s$, 则称 X 是良序集.

我们最熟悉的良序集就是自然数集 $\mathbb{N}$ 了.$\mathbb{Z}$ 在通常的大小关系下不是良序集, 但它在关系 $0 \preceq 1 \preceq -1 \preceq 2 \preceq -2 \preceq \ldots$ 下却成为了良序集. 良序原理告诉我们任何集合上都能配置一个偏序关系使该集合称为良序集.

良序原理 每个集合 X 都能有一个偏序 $\preceq$ 使得 $(X, \preceq)$ 是良序集.

定义 0.2.3 设 X 是偏序集, 如果 X 中任意两个元素都可比较, 即 $\forall x, y \in X$,$x \preceq y$ 与 $y \preceq x$ 至少有一个成立, 则称 X 是全序集. 偏序集的某个全序子集称为该偏序集的一条链.

显然, 实数集 $\mathbb{R}$ 的任意子集 (在通常的大小关系下) 都是全序集.

定义 0.2.4 设 X 是良序集, 对每个 $x\alpha \in X$, 定义 $X^\alpha := \{\beta \in X : \alpha \prec \beta\}$.

(1) 若 $X^\alpha = \varnothing$, 则称 α 是顶元素;

(2) 若 $X^\alpha \neq \varnothing$, 则由良序,$X^\alpha$ 中有最小元素 α', 称其为 α 的后继;

(3) 若 α 不是任何元素的后继, 则称其为一个极限.

定义 0.2.5 设 $(X, \preceq), (Y, \preceq')$ 是两个偏序集, 则 $X \times Y$ 在关系

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \prec x' \text{或} x = x', y \preceq y'$$

下称为偏序集, 称偏序 $\leq$ 是 $X \times Y$ 的字典序.

下面是一些基本性质.

定理 0.2.2 (1) 偏序集的子集是偏序集, 良序集的子集是良序集, 全序集的子集也是全序集;

(2) 任何良序集都是全序集;

(3) 两个良序集的笛卡尔积在字典序下仍为良序集;

(4) 如果 X 是良序集, 则 X 中每个严格递减序列 $x_1 \succ x_2 \succ \dots$ 是有限的;

(5) 假设选择公理成立, 则 (4) 的逆命题为真, 即若 X 是全序集, 且每个递减序列 $x_1 \succ x_2 \succ \dots$ 有限, 那么 X 是良序集.

证要:(1) 显然;

(2) 子集 $\{x, y\}$ 有最小元, 若为 x, 则 $x \preceq y$, 若为 y 则 $y \preceq x$, 于是二者之一必成立, 故为全序集;

(3) 设 X, Y 是良序集, 考虑 $X \times Y$ 的非空子集 A, 令 $A_x := \{x \in X | \exists y \in Y, (x, y) \in A\}$, 现在 A_x 是 X 的非空子集, 故 A_x 有最小元 x_0, 现在令 $B := \{y \in Y | (x_0, y) \in A\}$,$B$ 是 Y 的非空子集故有最小元 y_0, 现在 (x_0, y_0) 就是 A 中最小元. 由此证明了 $X \times Y$ 是良序集;

(4) 注意到集合 $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ 有最小元即可;

(5) 基本的思路并不复杂: 假设 X 不是良序集, 那么必有一个非空的子集 S, 它没有最小元,X 是全序集自然蕴含 S 是全序集.S 非空, 故存在 $x_1 \in S$,S 不含最小元, 故存在 $x_1 \succ x_2 \in S$, 现在我们取出了 $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \cdots \succ x_n$, 由于 S 没有最小元, 故存在 $x_n \succ x_{n+1}$. 由此我们得到 $x_1 \succ x_2 \succ \dots$, 这是一个无穷序列, 与假设矛盾.

上述证明似乎并没有用到选择公理, 但实际上我们给出的无穷序列是一个函数 $f : \mathbb{Z}_+ \to S$ 满足 $f(n) = x_n$, 而该函数是集合 $\mathbb{Z} \times S$ 的一个特殊的子集. 我们在 "构造"f 的时候实际上进行了无穷多次选择, 我们将 $f(n+1)$ 定义为 S 中 $\prec x_n$ 的某一个元素, 但是, 与通常的归纳定义不同, 这样的元素并不是唯一的, 也就是说, 我们无法利用数学归纳原理来得出 f, 我们需要使用选择公理.

我们将选择公理的使用具体陈述如下:

设 F 是由从 $\{1, 2, \dots, n\}$, (n 是自然数) 到 S 的一切函数 g 的族, 并设 β 是 F 上的选择函数, 即对每个非空子集 $T \subset F, \beta(T) \in F$.

因 S 非空, 选取 $s_1 \in S$ 定义 $F_1 := \{g \in F : \text{定义域为}\{1\}, g(1) = s_1\}$, 并定义 $g_1 = \beta(F_1)$. 对 $n > 0$, 归纳定义 $F_{n+1} = \{g \in F, \text{定义域为}\{0, 1, \dots, n+1\}, g|\{1, \dots, n\} = g_n \text{且} g(n) \succ g(n+1)\}$, 由归纳法知 F_{n+1} 非空, 现在可以定义 $g_{n+1} = \beta(F_{n+1})$. 最后定义 g^* 为所有 g_n 的并 (注意每个

函数 g_n 都是笛卡尔积 $\mathbb{Z}_+ \times S$ 的一个子集, 这里取集合的并), 则 g^* 是一个函数并且对一切 n 有 $g^*(n) = g_n(n)$. 现在 g^* 便是 S 中的无穷长度的严格单调递减序列, 这样便与假设矛盾.

不过在具体的证明中, 我们通常都会省略这一步骤, 而直接采用最开始的证明形式.

最后的一个说明就是, 如果进行的是有限多次选择, 即公理中的 A 是非空有限集, 或者考虑的是有限多个非空集的笛卡尔集, 这时候的结论是大家都普遍接受的. 选择公理的重要性在于 "任意" 多个集合, 只有在这时我们才会说 "证明依赖于选择公理".

如果说良序集是自然数集的推广, 那么超穷归纳法就可以看成数学归纳法的推广.

超穷归纳法 设 I 是良序集,$\{S(i), i \in I\}$ 是以 I 加标的一族命题, 设 i_0 是 I 中最小元, 如果

(1)$S(i_0)$ 成立;

(2) 对 $j \in I, j \neq i_0$, 如果 $\forall i \prec j, S(i)$ 成立, 那么 $S(j)$ 成立;

那么对一切 $i \in I, S(i)$ 均成立.

证要: 记 $J = \{i \in I | S(i)\text{不成立}\}$, 假设 J 非空, 则 J 有最小元 J_0, 现在由 (1),$j_0 \neq i_0$, 于是存在 $i \prec j$, 现在由 j 的定义, 一切 $i \prec j$ 有 $S(i)$ 成立, 但 $S(j)$ 不成立, 与 (2) 矛盾. 故 J 为空集, 因此结论成立.

定义 0.2.6 设 X 是偏序集,X 的子集 S 的一个上界是指元素 $x \in X$(不必在 S 中), 满足 $\forall s \in S, s \preceq x$.

集合 X 本身的上界 (如果有的话) 称为 X 的一个极大元素.

Zorn 引理是用来寻找极大元素的:

Zorn 引理 设 X 是非空偏序集, 其中每一个链都有上界, 那么 X 有极大元素.

定理 0.2.3 下面三个陈述等价:

(1)Zorn 引理;

(2) 良序原理;

(3) 选择公理.

选择公理的陈述看起来是无害的, 但是与之等价的另外两个公理却显得并不那么自然.

我们将上述定理分为几个定理来证明 (定理 0.2.7, 定理 0.2.8 与定理 0.2.9).

定义 0.2.7 设 X 是全序集,$c \in X$, 集合

$$\mathrm{Sec}(c) := \{x \in X | x \prec c\}$$

称为 X 在 c 处的截.

引理 0.2.4 全序集 X 是良序的当且仅当 X 的每个截是良序的.

证要: 必要性显然, 因为良序集的每个子集都是良序的.

充分性: 设 X 的每个截都是良序的, 设 S 是 X 的非空子集, 若 S 只含一个元素, 显然其有最小元. 因此不妨设 S 至少含 2 个元素 c, c',X 是全序, 不妨设 $c' \prec c$, 现在 $c' \in S_c$, 于是 $S \cap \mathrm{Sec}(c) \neq \varnothing$, 由于 $\mathrm{Sec}(c)$ 是良序集, 故 $S \cap \mathrm{Sec}(c)$ 作为其子集也是良序的, 于是它有最小元 z, 易知 z 也是 S 的最小元. 故 X 是良序集.

良序子集的并不一定良序, 因此我们需要添加额外假设.

定义 0.2.8 设 B, C 都是偏序集 X 的子集, 则用

$$B \trianglelefteq C$$

表示 $B = C$ 或存在 $c \in C$ 使得 $B = \mathrm{Sec}(c)$.

显然 $B \trianglelefteq C$ 蕴含 $B \subset C$.

引理 0.2.5 设 $\{S_i, i \in I\}$ 是偏序集 X 的一族良序子集, 若对每对 i, j,$B \trianglelefteq C$ 与 $C \trianglelefteq B$ 必有一个成立, 那么 $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ 也是 X 的良序子集.

证要: 显然 S 是全序集, 据引理 0.2.4, 只需证明 S 的每个截 $\mathrm{Sec}(c), c \in S$ 是良序的. 现在存在 i 使得 $c \in S_i$, 设 $s \in \mathrm{Sec}(c)$, 则 $s \prec c$, 现在存在 j 使得 $s \in S_j$, 若 $S_j \trianglelefteq S_i$, 则由定义 0.2.8 知 $s \in S_j \subset S_i$, 若 $S_i \trianglelefteq S_j$, 且 $S_i \neq S_j$, 则现在存在 $u \in S_j$ 使得 $S_i = \mathrm{Sec}(u) = \{x \in S_j | x \prec u\}$, 于是 $c \in S_i$ 蕴含 $c \prec u$, 现在 $s \in S_j, s \prec c \prec u$, 故 $s \in \mathrm{Sec}(u) = S_i$, 综上总有 $s \in S_i$, 于是 $\mathrm{Sec}(c) \subset S_i$, 利用良序集 S_i 的子集也是良序即得结论.

定义 0.2.9 如果良序集 X 的子集 A 满足 $A \neq \varnothing$, 且 $x \in X, a \in A, x \preceq a$ 蕴含 $x \in A$, 则称子集 A 在 X 中是闭的.

下一个引理告诉我们良序集的闭子集要么是 X 要么是某个截.

引理 0.2.6 设 X 是良序集, 则 A 在 X 中闭当且仅当 $A \trianglelefteq X$(即 $A = X$ 或存在 $c \in X$ 使 $A = \mathrm{Sec}(c)$).

证要: 显然 X 与 $\mathrm{Sec}(c)$ 都是闭的.

现在, 设 A 是闭子集且 $A \neq X$, 则集合 $S := \{x \in X | x \neq A\}$ 非空, 于是 S 有最小元 c. 由 c 的取法知 $\mathrm{Sec}(c) \subset A$. 现在对 $a \in A$, 若 $a \succeq c$, 则由 A 是闭的得出 $c \in A$, 矛盾! 故 $a \prec c$, 于是 $A \subset \mathrm{Sec}(c)$, 综上, 只要 $A \neq X$ 便有 $A = \mathrm{Sec}(c)$.

定理 0.2.7 Zorn 引理蕴含良序原理.

我们在抽象代数中已经用惯了 Zorn 引理, 所以这个证明应该比较自然.

证要:$\varnothing$ 是良序的, 因其不含非空的无最小元的子集.

设 X 是非空集合, 我们定义 F 是一切有序对 $(S, \subset)$ 的集合, 其中 S 是 X 的子集,$\subset$ 是使得 S 成为良序集合的二元关系. 现在我们需要在 F 上配置一个偏序关系, 我们定义

$$(S, \subset) \preceq (S', \subset')$$

当且仅当下面两个条件之一成立: (1)$S = S'$ 且 $\subset = \subset'$;

(2)$S \subset S', S \neq S'$ 且 $\subset'$ 限制在 S 上就是 $\subset$, 并且存在 $c \in S'$ 使得 $S = \mathrm{Sec}(c)$.

显然这是一个偏序关系. 注意到若 $S \subset S'$ 则 S 可以看成 S' 的子集且继承了 S' 的偏序关系, 于是这个关系实际上是说 $S \trianglelefteq S'$, 也是在说 S 是 S' 的闭子集 (引理 0.2.6).

接下来, 由于只含一个元素的集合自然是良序集, 于是 F 非空. 限制设 $T = \{(S_i. \subset_I), i \in I\}$ 是 F 的一条链 (全序子集), 我们需要找到其一个上界. 现在定义 $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, 并给它一个偏序关系 $\subset$:$x \subset y$ 当且仅当 $\exists k \in I, x, y \in S_i$ 且 $x \subset_k y$. 利用 T 是链不难证明该定义是合理的 (即不依赖 k 的选取) 并且这是 S 上的一个全序. 现在注意到每个 $\subset_i$ 都是 $\subset$ 在 S_i 上的限制, 于是 $T = \{S_i, i \in I\}$ 可以看成偏序集 S 的一族良序子集, 现在由 T 是链, 引用引理 0.2.5 便知 $(S, \subset)$ 是良序集, 于是它在 F 中. 不难证明每个 S_i 都在 S 中闭, 于是 $(S_i, \subset_i) \preceq (S, \subset)$. 于是 $(S, \subset)$ 便是这条链的上界.

于是由 Zorn 引理,F 中含极大元素 $(M,\leq)$, 若存在 $x\in X-M$, 则在 $M'=M\cup\{x\}$ 上定义 $\leq'$, 其中若 $a,b\in M$, 则 $a\leq' b$ 当且仅当 $a\leq b$, 并且对一切 $a\in M',a\leq' x$, 易知这是 M' 上的偏序关系且使 M' 成为良序集, 且 $M=\mathrm{Sec}(x)$, 于是 $(M,\leq)\prec(M',\leq')$, 这与极大元 $(M,\leq)$ 矛盾!

故 $M=X$, 因此 X 上有一个关系使得 X 成为良序集.

定理 0.2.8 良序原理蕴含选择公理.

证要: 这里需要说明一下我们如何构造函数. 函数 $f:A\to X$ 就是笛卡尔积 $A\times X$ 的子集 f(仍用记号 f 表示),f 满足对每个 $a\in A$, 都有唯一的 $x\in X$ 使得 $(a,x)\in f$. 于是构造 f 就是构造 $A\times X$ 的某个子集. 因此如果有一个具体法则, 那么便可以不借助选择公理构造函数, 如我们可以定义直接子集 $\{(n,n+1)|n\in\mathbb{Z}\}$ 来构造 $f(n)=n+1$ 的函数, 对一族群 $\{G_i,i\in I\}$ 我们也可以定义 $f:I\to\bigcup\limits_{i\in I}G_i$ 使得 $f=\{(i,1_i)|i\in I\}$, 其中 1_i 是 G_i 的单位元. 但是, 对于一般的集合族 $\{A_i,i\in I\}$, 我们便无法给出一个具体法则.

现在, 设 A 是非空集合, 那么良序原理告诉我们 A 上有某个良序, 现在 A 的一切非空子集都是良序集, 于是任意 $B\in P(A)^{\#}$ 都有最小元素, 于是我们可以定义 $\beta:=\{(B,B\text{的最小元素}|B\in P(A)^{\#})\}$,$\beta$ 便是所需的选择函数.

定理 0.2.9 选择公理蕴含 Zorn 引理.

证要: 假设 X 满足 Zorn 引理的条件但没有极大元素. 设 A 是 X 的良序子集, 则 A 是链, 因此 A 有上界 x, 但 x 不是极大元素, 故存在 $y\in X$ 使得 $x\prec y$, 因此每个良序子集 A 都有不在 A 中的上界. 令 W 表示 X 的一切良序子集的族, 对 $A\in W$ 定义 $U_A:=\{u\text{是}A\text{的上界且}u\notin A\}$, 则每个 U_A 非空, 现在选择公理成立, 定理 0.2.1 告诉我们 $\prod\limits_{A\in W}^{U_A}$ 非空, 取 $g\in\prod\limits_{A\in W}U_A$, 于是对 $A\in W,g(A)$ 是 A 的上界且 $g(A)\notin A$.

令 $c_0=g(\varnothing)$. 称 X 的良序子集为 g-集, 如果 $c_0\in C$ 且 $\forall c\in C,c=g\left(C\cap\mathrm{Sec}(c)\right)$.

接下来我们证明一切 g-集的并是 g-集.

设 C,D 均是 g-集, 我们断言要么 $C\trianglelefteq D$ 要么 $D\trianglelefteq C$. 令 Y 为满足 $B\trianglelefteq C$ 与 $B\trianglelefteq D$ 的一切子集 B 的并, 取 $y\in Y$, 那么存在 B 使得 $y\in B,B\trianglelefteq C,B\trianglelefteq D$, 此时 B 在 C 中是闭的, 若 $a\in C,a\preceq y$, 那么 $a\in B$, 因此 $a\in Y$, 于是 Y 在 C 中是闭的. 同理:Y 在 D 中是闭的. 于是 $Y\trianglelefteq C,Y\trianglelefteq D$. 现在如果 $Y\neq C,Y\neq D$, 那么存在 $c\in C,d\in D$ 使得 $Y=C\cap\mathrm{Sec}(c)=D\cap\mathrm{Sec}(d)$, 现在 C,D 是 g-集, 于是 $c=g\left(C\cap\mathrm{Sec}(c)\right)=g(Y)=g\left(D\cap\mathrm{Sec}(d)\right)=d$, 此时易知 $Y\cup\{c\}=Y\cup\{d\}$ 在 C,D 中是闭的, 由 Y 的定义知 $Y\cup\{c\}\subset Y$, 与 $c\notin Y$ 矛盾!. 故 $Y=C$ 或 D, 因此 $C\trianglelefteq D$ 或 $D\trianglelefteq C$.

设 Ω 是一切 g-集的并, 上述断言结合引理 0.2.5 知 Ω 是 X 的良序子集, 若 $b\in\Omega$, 那么 b 属于某个 g-集 C, 于是 $c=g\left(C\cap\mathrm{Sec}(c)\right)$, 由于二者均为 g-集, 故要么 $\Omega\trianglelefteq C$, 要么 $C\trianglelefteq\Omega$, 现在 $C\subset\Omega$, 故只能是 $C\trianglelefteq\Omega$, 于是 $C\cap\mathrm{Sec}(b)=\Omega\cap\mathrm{Sec}(b)$, 故 $b=g\left(\Omega\cap\mathrm{Sec}(b)\right)$, 于是 Ω 是一个 g-集. 但是 $\Omega\cup\{g(\Omega)\}$ 是不包含在 Ω 中的 g-集, 这样就导致了矛盾!

于是我们最初的假设不成立, 故 X 有极大元素.

0.3 环, 模与代数补充

首先需要说明的是, 我们以后讨论的环都具有单位元, 并将单位元即为 1, 代数都是域上的代数, 因此本节的结论具有一定的局限性.

定义 0.3.1 设 R 是一个含有单位元的环,A 是一个 Abel 群, 如果有一个二元运算 $R\times A\to A$, 对任意 $r,s\in R,a,b\in A$ 满足:

(1)$r(a+b)=ra+rb$;

(2)$(r+s)a=ra+sa$;

(3)$r(sa)=(rs)a$.

(4)$1a=a$.

则称 A 是环 R 上的左模或左 R-模. 如果 R 是除环, 则称 A 为 R 上的 (左) 向量空间 (或线性空间).(由于域也是除环, 因此该定义与线性代数相符).

类似地可定义右模. 同时不难看出, 模可以作为向量空间的一个推广.

例 0.3.1 (1) 设 G 是一个 (加法)Abel 群, 对 $a\in G,n\in\mathbb{Z}$, 定义 na 为 n 个 a 的和, 那么 G 成为了一个左 $\mathbb{Z}$-模.

(2) 设 R 是 S 的子环, 按环 S 上的乘法定义 $rs(r\in R,s\in S)$, 则 S 成为一个左 R-模.

特别地, 环 R 上的多项式环 $R[x_1,x_2,\dots,x_m]$ 是左 R-模; 域 K 的扩域 F 也是 K 上的向量空间.

若令 $S=R$, 则加法群 R 成为左 R-模, 称它为环 R 上的左正则模或左正则 R-模.

(3) 设 I 是 R 的一个左理想, 按 R 上的乘法定义 $ra,r\in I,a\in R$, 则 I 成为一个左 R-模.

考虑商群 L/I, 定义 $r(r'+I)=rr'+I,r,r'\in R$, 则 R/I 成为一个左 R-模.(注意, 如果 I 不是双边理想, 则 R/I 不一定能成为环).

例 0.3.2 设 R 是一个环, 考虑 Abel 群 R^{op}, 它作为加法 Abel 群与 R 相等, 在 R^{op} 上定义乘法 “$\circ$”:

$$a\circ b:=ba$$

其中 ba 是环 R 中的乘法.

不难验证 R^{op} 构成一个环, 称其为 R 的反环 (opposite ring), 显然反环是相互的.

若 A 是一个左 R-模, 那么定义运算 $ar:=ra,r\in R^{op},r\in R,a\in A$ 之后,A 成为了一个右 R^{op}-模. 特别地, 对交换环而言 $R=R^{op}$, 因此每一个交换环上的左模都自然地成为一个右模.

定义 0.3.2 设 K 是一个域,R 是一个环, 如果满足:

(1)$(R,+)$ 构成域 K 上的向量空间;

(2)$(ka)b=k(ab)=a(kb),\forall k\in K,a,b\in R$;

则称 R 是域 K 上的一个代数或 K-代数. 向量空间 R 的维数称为代数 R 的维数, 环 R 的单位元称为代数 R 的单位元.

定义 0.3.3 (1) 设 A,B 均为左 R-模, 若函数 $f:A\to B$ 满足:

$$f(ra)=rf(a),\forall r\in R,a\in A;f(a+b)=f(a)+f(b),\forall a,b\in A,$$

则称 f 是从 A 到 B 的模同态或 R-同态. 群同态的核 $\ker f$ 称为模同态的核. 若 f 为双射, 则称其为模同构或 R-同构, 此时称模 A 与模 B 同构, 记作 $A \cong B$.

当 R 为除环时, 对应的 f 常称为线性映射.

(2) 设 A 与 B 都是域 K 上的代数, 如果映射 $f : A \to B$ 满足:

(i)f 为域 K 上的线性映射;

(ii)f 为环同态;

(iii)$f(1_A) = f(1_B)$, 即 f 将单位元映到单位元.

则称 f 为 A 到 B 的一个代数同态, 若 f 为双射, 则称 f 为代数同构.

例 0.3.3 (1) 域 K 上全体 n 元多项式构成 K-代数;

(2) 设 A 是域 K 上的一个代数, 如果 V 是环 A 上的左模, 则称 V 是代数 A 上的左模或左 $A-$ 模.

此时, 如果定义 K 与 V 的纯量乘法为

$$kv := (k1_K)v, \forall k \in K, v \in V$$

则 V 成为域 K 上的一个线性空间, 当 $\dim_K V$ 为有限维时, 称 M 是有限维左 A-模.

不难证明, 该纯量乘法满足 $a(kv) = k(av) = (ka)v, \forall a \in A, k \in K, v \in V$.

(3) 设 A 是一个代数, 环 A 上的左正则模 A 称为代数 A 上的左正则模或左正则 A-模.

(4) 域 K 上全体 n 阶方阵构成的集合 $M_n(K)$ 是域 K 上的代数;

(5) 设 V 是域 K 上的线性空间, 全体 V 到 V 的线性变换组成的集合 $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ 是域 K 上的代数, 当 $\dim_K V = n$ 时, 它与 (3) 中的 $M_n(K)$ 同构.

定义 0.3.4 设 A 是一个左 R-模, 若 B 是 A(作为加法 Abel 群) 的子群, 并且 $\forall r \in R, b \in B$ 有 $rb \in B$, 则 B 也是一个左 R-模, 称其为 A 的子模.

向量空间的子模称为子空间.

例 0.3.4 (1) 设 $f : A \to B$ 是 R-模同态, 那么 $\ker f$ 是 A 的子模,$\mathrm{Im} f$ 是 B 的子模. 若 C 为 B 的子模, 则 $f^{-1}(C) := \{a \in A | f(a) \in C\}$ 是 A 的子模.

(2) 考虑左正则 R-模,I 是其子模当且仅当 I 是环 R 的左理想. 这给出了子模与环的 (左) 理想之间的一个关系, 基于此, 很多关于环的性质与关于模的性质可以互相对应.

定义 0.3.5 (1) 设 X 是左 R-模 A 的一个子集, 我们将 A 的所有包含 X 的子模的交称为由 X 生成的子模. 当 X 为有限集合时, 称该模是有限生成的.

(2) 若 $\{B_i\}_{i \in I}$ 为一族子模, 由 $X = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ 生成的子模称为 $\{B_i\}_{i \in I}$ 的和, 当 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ 时, 记为 $B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

(3) 称由一个元素生成的模为循环模.

定义 0.3.6 设 B 为左 R-模 A 的子模, 在商群 A/B 上定义运算:

$$r(a + B) = ra + B, \forall r \in R, a \in A.$$

则 A/B 在该运算下构成左 R-模, 称为 A 对子模 B 的商模.

自然有满同态 $\pi A \to A/B, \pi(a) = a + B$.

定理 0.3.1 设 $f: A \to B$ 为 R-模同态,B, C 为 A 的子模,C 为 B 的子模, 那么:

(1)$A/\ker f \cong \mathrm{Im} f$, 同构映射为 $a + \ker f \mapsto f(a)$;

(2)$B/(B \cap C) \cong (B+C)/C$, 同构映射为 $b + B \cap C \mapsto b + C$;

(3)B/C 是 A/C 的子模, 且 $(A/C)/(B/C) \cong A/B$, 同构映射为 $(a+C)+(B/C) \mapsto a + B$.

证明与群的相应定理相同.

定义 0.3.7 设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一列左 R-模, 设 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 为群 A_i 的直积,$\sum\limits_{i\in I} A_i$ 为 Abel 群 A_i 的直和, 那么

(1) 在 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 上定义运算 $r\{a_i\}_{i\in I} = \{ra_i\}_{i\in I}, r \in R$, 则 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 成为一个左 R-模, 称其为 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的外直积;

(2) 在 (1) 的运算下,$\sum\limits_{i\in I} A_i$ 成为 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 的子模, 称其为 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的外直和;

在 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的情况下, 直积与直和相同, 通常记为 $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$.

定理 0.3.2 设 A, B 均为左 R-模, 用 $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ 表示所有从 A 到 B 的模同态构成的集合, 对 $f, g \in \mathrm{Hom}_R$ 定义加法:

$$(f+g)(a) := f(a) + g(a),$$

则 $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ 构成一个 Abel 群.

若取 $B = A$, 将映射的复合作为乘法, 那么 $\mathrm{Hom}_R(A, A)$ 便成为了一个具有单位元的环.

定理 0.3.3 设 $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 均为左 R-模, 则 $A \cong A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ 的充要条件为对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 存在模同态 $\pi_i : A \to A_i, \iota_i : A_i \to A$ 满足:

(1)$\pi_i \iota_i = 1_{A_i}, \forall 1 \le i \le n$;

(2)$\pi_i \iota_j = 0$, 若 $i \ne j$;

(3)$\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 + \cdots + \iota_n\pi_n = 1_A$.

证要: 定义映射 $\pi_i' : A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \to A_i, \pi_i'(a_1, \ldots, a_n) = a_i$, $\iota_i' : A_i \to A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n, \iota_i'(a) = (0, \ldots, 0, \underbrace{a}_{\text{第}i\text{位}}, 0, \ldots, 0)$.

必要性: 设 f 为 A 到 $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ 的同构映射, 令 $\pi_i = \pi_i' f, \iota_i = f^{-1}\iota_i'$ 即可.

充分性: 取 $f = \iota_1\pi_1' + \cdots + \iota_n\pi_n'$ 即可.

定理 0.3.4 设 A 为左 R-模,$\{A_i\}_{i\in I}$ 为一族左 R-模, 如果

(1)A 等于 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的和;

(2) 对每个 $j \in I$, 记 A_j^* 为 $\{A_i\}_{i\in I, i\ne j}$ 的和, 且 $A_j \bigcap A_j^* = 0$;

那么 $A \cong \sum\limits_{i\in I} A_i$. 此时称 A 为 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的内直和, 仍使用与外直和同样的符号. 以后内外直和统称为直和, 读者可根据上下文作具体区分.

证要: 定义 $f : \sum\limits_{i\in I} A_i \to A, f(\{a_i\}_{i\in I}) = \sum\limits_{i\in I} a_i$, 注意到 $\{a_i\}_{i\in I}$ 中只有有限个非零, 故 f 为良定义的.

不难验证 f 为模同态,(1) 告诉我们 f 为满射 ($\mathrm{Im} f = A$),(2) 告诉我们 f 为单射 (ker f=0), 由此便得到同构.

同时, 不难得到 A 是 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的内直和当且仅当 A 中每个元素 a 都可以唯一地写成 $a = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}, it \in I, a_{it} \in A_{it}, 1 \leq t \leq n$, 且 i_t 两两不等.

定义 0.3.8 (1) 设 A 为左 R-模, 且 A 非零, 如果 A 没有非平凡的子模 (即 A 的子模只有 0 与 A), 则称 A 是不可约模 (或单模); 否则称 A 是可约模 (或非单模).

(2) 如果环 R 非零, 并且只有平凡的双边理想 0 与 R, 则称 R 为单环.

(3) 设 A 是域 K 上的代数, 如果环 A 是单环, 则称代数 A 是单代数.

例 0.3.5 (1) 每一个不可约模都是循环模, 反之不一定成立;

(2) 设 D 为除环, 则 D 是单环, 也是 D 上的左正则单模;

(3) 设 D 为除环, 则 D 上所有 $n \times n$ 矩阵构成的环 $R = M_n(D)$, 记 $I_k := \{(a_{ij}) \in R | a_{ij} = 0 (j \neq k)\}, 1 \leq k \leq n$, 易知 I_k 为 R 的左理想, 并且左 R-模 I_k 是单模, 因此 $n \geq 1$ 时左正则 R 模不是单模. 但 R 是单环, 因此除环 D 上的有限维向量空间 V 到自身全体可逆线性映射构成的环是单环.

证要:(1) 设 $a \in A$ 非零, 则 Ra 为 A 的子模且 Ra 非零, 故 $R = Ra$ 为循环模; 反例取 $R = \mathbb{Z}, A = \mathbb{Z}_6$ 即可;

(2) 注意到 D 上的非零元都是单位;

(3) 这是线性代数的题.

引理 0.3.5(Schur) 设左 R-模 A 是单模,B 是任意左 R-模, 那么:

(1) 任意非零模同态 $f : A \to B$ 都是单同态;

(2) 任意非零模同态 $g : B \to A$ 都是满同态;

(3) 环 $D = \mathrm{Hom}_R(A, A)$ 是除环.

证明:(1) 注意到 $\ker f \neq A, A$ 是单模, 故 $\ker f = 0$;

(2) 注意到 $\mathrm{Im} g \neq 0, A$ 是单模, 故 $\mathrm{Im} g = A$;

(3) 任取 D 中非零元 h, 由 (1)(2) 知 h 为模同构, 则 h^{-1} 存在且也为模同构, 故 D 中任意非零元都是单位, 故 D 为除环.

定义 0.3.9 (1) 设 A 是左 R-模, 如果对于 A 的每一个子模 B, 都存在 A 的子模 C, 使得 $A = B \oplus C$, 则称 A 是完全可约的或半单的.

(2) 设 R 是域 K 上的有限维代数, 如果每一个左 R-模都是完全可约的, 则称 R 是半单的;

下述定理给出了完全可约模的结构.

定理 0.3.6 (1) 域 K 上代数 R 的完全可约左模 A 的子模也是完全可约的;

(2) 设 R 是 K-代数, 则有限维完全可约左模一定可以分解为有限多个不可约子模的直和.

证明类比定理 1.2.2 与 1.2.4 的有限维情况.(奇怪的引用, 不过鉴于这是第二章的前置而非第一章的前置, 也就无所谓了).

定义 0.3.10 (1) 设 e 为环 R 中的元素, 如果 $e^2 = e \neq 0$, 则称 e 为幂等元. 如果两个幂等元满足 $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$, 则称它们正交. 若幂等元 e 不能表示成两个正交的幂等元之和, 则称它是本原的;

(2) 集合 $Z(R) := \{r \in R | rx = xr, \forall x \in R\}$ 称为环 R 的中心, 显然 $Z(R)$ 是 R 的子环;

(3) 若幂等元 e 满足 $e \in Z(R)$, 则称 e 是中心幂等元. 如果中心幂等元 e 不能表示为两个正交的中心幂等元之和, 则称其为本原的.

定义 0.3.11 (1) 环 R 的左理想如果能表示为 R 的两个非零左理想的直和, 则称 I 是可分解的, 否则称 I 是不可分解的.

(2) 环 R 的双边理想如果能表示为 R 的两个非零双边理想的直和, 则称 I 是可分解的, 否则称 I 是不可分解的.

(3) 设 I 为环 R 的左理想, 如果对任意满足 $0 \subset J \subset I$ 的左理想 J, 有 $J = 0$ 或 $J = I$, 则称 I 是极小的;

(4) 设 I 为环 R 的双边理想, 如果对任意满足 $0 \subset J \subset I$ 的双边理想 J, 有 $J = 0$ 或 $J = I$, 则称 I 是极小的.

定理 0.3.7 设 R 是含有单位元的环.

(1)(i) 若 R 能分解为有限多个非零左理想的直和 $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$, 设 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n, e_i \in I_i (1 \leq i \leq n)$, 那么 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是 R 的一组两两正交的幂等元, 并且 $I_i = Re_i (1 \leq i \leq n)$;

(ii) 若 $e_1, e_2, \ldots, e_m$ 是 R 的一组两两正交的幂等元, 令 $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, 那么有左理想的直和分解 $Re = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_m$.

(2)(i) 若 R 能分解为有限多个非零双边理想的直和 $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$, 设 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n, e_i \in I_i (1 \leq i \leq n)$, 那么 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是 R 的一组两两正交的中心幂等元, 并且 $I_i = Re_i, e_i$ 为环 Re_i 的单位元 $(1 \leq i \leq n)$;

(ii) 若 $e_1, e_2, \ldots, e_m$ 是 R 的一组两两正交的中心幂等元, 令 $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, 那么有双边理想的直和分解 $Re = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_m$.

证要:(1)(i) 注意到 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, 于是 $e_i = e_ie_1 + e_ie_2 + \cdots + e_ie_n, e_i = 0 + 0 + \cdots + e_i + \cdots + 0$ 是 e_i 的两种分解, 且 $e_ie_j \in I_j$, 由直和知分解式是唯一的, 因此必有

$$e_ie_j = \delta_{ij}e_i = \begin{cases} e_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

因此 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是 R 的一组两两正交的幂等元.

显然 $Re_i \subset I_i$. 任取 $a \in I_i, a \neq 0$, 那么 $a = ae_1 + ae_2 + \cdots + ae_n = 0 + 0 + \cdots + a + \cdots + 0$, 因此 $a = ae_i \in Ae_i$, 故 $I_i \subset Ae_i$, 于是 $I_i = Re_i$.

(ii) 利用 $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ 易得 $Re \subset Re_1 + Re_2 + \cdots + Re_m$.

注意到 $a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = (a_1e_1 + \cdots + a_ne_n)e \in Ae$(由幂等性与正交性直接计算即可).

于是 $Re = Re_1 + Re_2 + \cdots + Re_m$.

若 $a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ 是两种分解, 右乘 e_j 便知 $a_je_j = b_je_j$, 故分解式唯一, 因此为直和.

(2) 与 (1) 类似.

推论 0.3.8 (1) 设 $e \neq 1$ 是环 R 的幂等元, 则左理想 Re 是不可分解的当且仅当 e 是本原的;

(2) 设 $e \neq 1$ 是环 R 的中心幂等元, 则双边理想 Re 是不可分解的当且仅当 e 是本原的.

证要:(1) 必要性: 若有分解 $e = e_1 + e_2$, 则由定理 0.3.7 知 $Re = Re_1 \oplus Re_2$, 矛盾!

充分性: 若 e 本原, 假设有分解 $Re = I_1 \oplus I_2$, 设 $e = e_1 + e_2$.

注意到 $e^2=e,(1-e)^2=1-e,e(1-e)=0$, 因此幂等元 $e,1-e$ 相互正交, 结合定理 0.3.7 便有

$$R=Re\oplus R(1-e)=R(1-e)\oplus I_1\oplus I_2.$$

并且 $1=(1-e)+e=(1-e)+e_1+e_2$, 再利用定理 0.3.7 便知 e_1,e_2 是正交的幂等元, 这与 e 本原矛盾, 故 Re 不可分解.

(2) 与 (1) 类似.

上述定理与推论说明, 环 R 分解为不可分解的左 (双边) 理想的直和等价于 R 的单位元分解为两两正交的本原 (中心) 幂等元直和.

定理 0.3.9 环 R 的两个本原中心幂等元要么相等要么正交.

证要: 设 e_1,e_2 为 R 的两个本原中心幂等元. 不难证明 $(e_1e_2)^2=e_1e_2,(e_1(1-e_2))^2=e_1(1-e_2),(e_2(1-e_1))^2=e_2(1-e_1)$.

并且 $e_1=e_1e_2+e_1(1-e_2),e_2=e_1e_2+(1-e_1)e_2$, 因此由本原性知要么 $e_1e_2=0$, 要么 $e_1(1-e_2)=e_2(1-e_1)=0$,

因此要么 $e_1e_2=0$, 要么 $e_1=e_2$.

推论 0.3.10 如果环 R 的单位元 1 可以表示成两两不等的本原中心幂等元 $e_1,e_2,\dots,e_n$ 之和, 那么 $e_1,e_2,\dots,e_n$ 是 R 的全部本原中心幂等元.

证要: 反证. 若存在本原中心幂等元 f 不在分解式内, 则 f 与每个 e_i 均正交, 因此

$$f=1f=e_1f+\cdots+e_nf=0,$$

这是一个矛盾.

下述定理指出了有限维半单代数的不可约子模的一部分性质.

定理 0.3.11 (1) 设 A 是域 K 上有限维半单代数, 那么左正则模 A 可以分解为有限多个不可约子模的直和

$$A=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_n;$$

从而 A 的单位元可分解为 A 的一组两两正交的本原幂等元之和

$$1=e_1+e_2+\cdots+e_n,e_i\in L_i,1\le i\le n,$$

且 $L_i=Ae_i,1\le i\le n$.

(2) 每一个不可约左 A-模都同构于 (1) 中直和分解式中某一个不可约子模, 从而每一个不可约左 A-模都是有限维的. 这说明 (1) 中的直和分解式在同构意义下给出了所有的不可约左 A 模 (可能有重复).

证要:(1) 由定理 0.3.6 知分解式存在, 注意到子模 L_i 均是环 A 的左理想, 因此该分解也是环 A 到其不可分解的左理想的直和分解, 由定理 0.3.7 与推论 0.3.8 便得到所需的全部结论;

(2) 设 M 是 A 的一个不可约子模, 取 $x\in M,x\neq 0$,

注意到 $Ae_ix:=\{ae_ix|a\in A\}$ 是 M 的子模, 而 M 不可约, 因此 $Ae_ix=0$ 或 M.

考虑映射 $f_i:Ae_i\to Ae_ix,f_i(ae_i)=ae_ix,a\in A$. 则 f_i 是良定义的模满同态. 由于 Ae_i 不可约, 因此 $\ker f_i=0$ 或 Ae_i.

注意到 $x=1x=e_1x+\cdots+e_nx, x$ 非零, 故一定有一个 e_j 使得 e_jx 不为 0, 此时 $\ker f_j=0$ 且 $Ae_jx=M$,, 于是 f_j 为模同构, 即 $M\cong Ae_j$.

定理 0.3.12 设 A 是环 R 上的非零左模, 则下述条件等价:

(1)A 是完全可约的;

(2)A 是一族不可约子模的和;

(3)A 是一族不可约子模的 (内) 直和.

证要:(1)⇒(3)⇒(2): 类比定理 1.2.2, 定理 1.2.3 与定理 1.2.4.

(2)⇒(3): 设 A 是 $\{B_i\}_{i\in I}$ 的和. 考虑满足 $J\subset I, J$ 非空, 且 $\{B_j\}_{j\in J}$ 的和为直和的全体 J 构成的集合 S, 利用 Zorn 引理不难证明 S 中有一个极大元, 我们仍用 J 来表示这个极大元. 显然 $\sum\limits_{j\in J}B_j\subset A$. 接下来, 对任意 $i\in I$, 由 B_i 不可约知 $B_i\cap(\sum\limits_{j\in J}B_j)=B_i$ 或 0. 若等于 0, 则 $J\cup\{i\}\in S$, 与 J 极大矛盾. 故 $B_i\cap(\sum\limits_{j\in J}B_j)=B_i$, 因此 $B_i\subset\sum\limits_{j\in J}B_j,\forall i\in I$. 因此 $A\subset\sum\limits_{j\in J}B_j$. 证毕.

(3)⇒(1) 设 $A=\sum\limits_{i\in I}B_i$. 对子模 B, 有 $B\cap B_i=B_i$ 或 0(由 B_i 是单群). 若对每个 i 都有 $B\cap B_i=B_i$, 则 $B=A$, 显然成立. 否则, 利用 Zorn 引理找到满足如下条件的极大元 $J\subset I$:$\{B_j\}_{j\in J}$ 的和为直和且 $B\bigcap\left(\sum\limits_{j\in J}B_j\right)=0$. 类比前一小问的方法证明 $A=B\oplus\sum\limits_{j\in J}B_j$ 即可.

下述定理是对定理 0.3.11(1) 的补充.

定理 0.3.13 设 A 是域 K 上的有限维代数, 则下述条件等价:

(1)A 是半单的;

(2) 左正则 A-模 A 是完全可约的;

(3) 环 A 的每一个非零左理想都由一个幂等元生成;

(4) 左正则模 A 可以分解为有限多个不可约子模的直和

$$A=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_n;$$

并且 A 的单位元可分解为 A 的一组两两正交的本原幂等元之和

$$1=e_1+e_2+\cdots+e_n, e_i\in L_i, 1\leq i\leq n,$$

且 $L_i=Ae_i, 1\leq i\leq n$.

证要:(1)⇒(2) 显然.(2)⇒(4) 利用定理 0.3.11, 注意到该定理第一部分的证明中只需用到左正则 A-模 A 完全可约.(4)⇒(2) 即为定理 0.3.12.

(2)⇒(3) 设 L 是 A 的非零左理想, 且 $L\neq A$(否则 L 由 1 生成), 则 L 是左正则模 A 的非零子模, 因此存在非零子模 L' 使得 $A=L\oplus L'$, 由定理 0.3.7 便得 L 是由一个幂等元生成的.

(3)⇒(2) 设 L 是 A 的子模, 则 L 为环 A 的左理想, 于是存在幂等元 e 使得 $L=Ae$, 于是有分解 $A=L\oplus A(1-e)$, 故左正则模 A 完全可约.

(4)⇒(1) 取非零的左 A-模 M, 取 $x\in M$ 非零, 则 $x=1x=e_1x+\cdots+e_nx\in\sum_{i=1}^{n}Ae_ix$, 于是 $M=\sum_{x\in X}\sum_{i=1}^{n}Ae_ix$. 不难证明 $Ae_i\cong Ae_ix$, 得到 Ae_ix 不可约, 引用定理 0.3.12 便得到 M 完全可约, 因此 A 半单.

接下来我们将给出有限维半单代数的不同构的不可约左模的个数.

定义 0.3.12 设 A 是环 R 上的左模.

(1)A 的子模的递降子列

$$A=A_0\supset A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n$$

称为 A 的一个正规列 (normal series), 商模 $A_i/A_{i+1},i=0,1,\ldots,n-1$ 称为正规列的因子 (factors), 正规列中所有真包含的个数 (也就是所有非平凡因子的个数) 称为正规列的长度 (length);

(2) 正规列的一个改良 (refinement) 是指通过在原正规列中插入有限个子模形成的一个新正规列, 一个真改良 (proper refinement) 是指改良后的正规列长度大于原正规列 (忽略我的英语渣翻译);

(3) 如果两个正规列的所有非平凡的因子能够一一配对使得对应的因子同构, 则称这两个正规列等价, 显然, 这是一个等价关系, 且必要条件是正规列的长度相等;

(4) 如果 (1) 中正规列满足 $A_n=0$(结束于子模 0) 且每一个因子都是单模 (不可约), 则称该正规列是合成列 (composition series).

为了弄清正规列的一个相互关系, 需要一个引理:

引理 0.3.14(Zassenhaus) 设 C^*,C,D^*,D 都是左 R-模 A 的子模, 且 C^* 是 C 的子模,D^* 是 D 的子模, 则有模同构

$$(C^*+(C\cap D))/(C^*+(C\cap D^*))\cong(D^*+(C\cap D))/(D^*+(C^*\cap D)).$$

证要: 记 $M=(C^*\cap D)+(C\cap D^*)$, 考虑映射

$$f:C^*+(C\cap D)\to(C\cap D)/M,f(a+b)=b+M,a\in C^*,b\in C\cap D.$$

验证 f 良定义, 是模同态, 且 $\ker f=C^*+(C\cap D^*)$, 由模同态基本定理 (定理 0.3.1) 便得

$$(C^*+(C\cap D))/(C^*+(C\cap D^*))\cong(C\cap D)/M.$$

同理有

$$(D^*+(C\cap D))/(D^*+(C^*\cap D))\cong(C\cap D)/M$$

, 于是

$$(C^*+(C\cap D))/(C^*+(C\cap D^*))\cong(D^*+(C\cap D))/(D^*+(C^*\cap D)).$$

定理 0.3.15(Jordan-Hölder) (1) 模 A 的任意两个正规列都存在等价的改良;

(2) 如果模 A 存在合成列, 那么任意两个合成列等价.

证明:(1) 设 A 有两个正规列 $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n, A = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_m$. 并令 $A_{n+1} = B_{m+1} = 0$.

命 $A_{i,j} := A_{i+1} + (A_i \cap B_j), 0 \le i \le n+1, 0 \le j \le m+1$, 则有 $A_i = A_{i,0} \supset A_{i,1} \supset \cdots \supset A_{i,m+1} = A_{i+1}$.

于是我们便得到了第一个正规列的一个改良.

同理, 命 $B_{i,j} := B_{i+1} + (B_i \cap A_j), 0 \le i \le m+1, 0 \le j \le n+1$ 便能得到第二个正规列的一个改良.

两个改良都含有 $(m+1)(n+1)$ 项, 对 $A_i, A_{i+1}, B_i, B_{i+1}$ 引用 Zassenhaus 引理知 $A_{i,j}/A_{i,j+1} \cong B_{i,j}/B_{i+1,j}$.

因此两个改良等价.

(2) 注意到合成列不存在真改良, 因此其任意改良都与自己等价, 于是 (2) 成为 (1) 的直接推论.

下面的定义和定理给出了模 A 有合成列的充要条件, 不过与我们主线无关, 仅作为补充.

定义 0.3.13 设 A 是环 R 上的左模.

(1) 若对 A 的任意 (无穷) 子模升链 $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, 一定存在正整数 n 使得对任意 $i \ge n$ 均有 $A_i = A_n$, 则称 A 满足 (子模) 升链条件 (ascending chain condition, 简记为 ACC), 或称 A 是 Noether 模;

(2) 若对 A 的任意 (无穷) 子模降链 $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, 一定存在正整数 n 使得对任意 $i \ge n$ 均有 $A_i = A_n$, 则称 A 满足 (子模) 降链条件 (descending chain condition, 简记为 DCC), 或称 A 是 Artin 模.

定理 0.3.16 非零模 A 有合成列当且仅当 A 既满足 ACC 又满足 DCC.

证要: 必要性: 设 A 有合成列, 且长度为 n, 由定理 0.3.15(Jordan-Hölder) 知 A 的所有合成列长度均为 n, 且任何正规列长度不超过 n.

但是, 如果 A 不满足 ACC(DCC), 则 A 必然有无穷升 (降) 链使得每一个包含都是真包含, 取其中 $n+1$ 项便得到一个长度为 $n+1$ 的正规列, 矛盾!

充分性: 设 A 既满足 ACC 又满足 DCC.

对 A 的任意非零子模 B, 定义 $S(B)$ 为所有满足 $C \subset, C \neq B$ 的子模 C 构成的集合, 并定义 $S(0) = \{0\}$. 显然, 非零模 B 是单模当且仅当 $S(B) = 0$.

利用 ACC 的条件与 Zorn 引理不难证明对每个 B,$S(B)$ 都有一个极大元 B'.(注意, 这是满足 ACC 的模的性质, 模 A 满足 ACC 当且仅当其任意非空子模集合都有极大元).

设 S 为 A 的所有子模的集合, 运用选择公理便知存在一个函数 $f : S \to S, f(B) = B'$. 显然 $f(B) = B$ 当且仅当 $B = 0$.

令 $B = A_0 = A$, 记 $A_{i+1} = f(A_i), i \ge 0$, 归纳地定义了一列子模, 且有 $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$.

利用 DCC 便知, 存在最小的 n 使得任意 $j \ge n$ 都有 $A_j = A_n$. 于是得到正规列 $A_0 \supset A_1 \supset \cdots \subset A_n$. 目的是证明它就是合成列.

注意到 $f(A_n) = A_n$, 故 $A_n = 0$. 对 $i < n, f(A_i) \neq A_i$, 故 A_i 与 A_i/A_{i+1} 非零.

考虑因子 A_i/A_{i+1}, 注意到其子模与模 A_i 的包含 A_{i+1} 的子模一一对应 (读者可类比商群的类似结论), 结合 A_{i+1} 的极大性便知 A_i/A_{i+1} 没有真子模, 因此它是单群.

证毕.

接下来我们回到主线.

定理 0.3.15(2) 给出了定理 0.3.11 中直和分解的唯一性 (同构意义下)

定理 0.3.17 设 A 是域 K 上的有限维半单代数, 那么左正则 A-模 A 到不可约子模的两种直和分解式中不可约子模的个数相同, 并且两种直和分解式中的不可约子模能用某种方式配对, 使得对应的不可约子模是同构的.

证要: 考虑分解式 $A = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n$, 那么有正规列

$$A = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n \supset L_2 \oplus \cdots \oplus L_n \supset \cdots \supset L_n \supset 0.$$

利用模同态基本定理不难证明 $(L_i \oplus \cdots \oplus L_n)/(L_{i+1} \oplus \cdots \oplus L_n) \cong L_i$, 由此知每个因子都是单模. 于是该分解给出了一个合成列, 因子恰为分解中出现的所有不可约子模, 利用定理 0.3.14 即可.

由此可知在左正则 A-模 A 的上述分解中, 与某个子模 L_i 同构的不可约子模个数是不随分解式改变的, 称这个数目为 L_i 在 A 中的重数.

同样地, 直和分解式中所有不同构的子模个数也是与分解式无关, 这就是所有不同构的不可约左模的个数, 接下来我们将对其进行研究.

引理 0.3.18 设 A 是域 K 上的有限维半单代数,L 和 L' 是环 A 的两个极小左理想.

(1) 若 $L \cong L'$, 则 $LL' = L'$;

(2) 若 $L \ncong L'$, 则 $LL' = 0$.

此处左理想的同构意味着它们作为环 A 的左模同构.

证要:$LL' \subset L', L'$ 是极小左理想, 故 $LL' = L'$ 或 0.

(1) 设有同构 σ. 任取 $x \in L'$, 则存在 $x \in L$ 使得 $x' = \sigma(x)$. 由定理 0.3.12 知存在 A 的幂等元 e 使得 $L = Ae$, 那么存在 $a \in A$ 使 $x = ae$. 因此

$$x' = \sigma(x) = \sigma(ae) = a\sigma(e) = a\sigma(ee) = ae\sigma(e) = x\sigma(e) \in LL'.$$

故 $L' \in LL'$, 因此 $LL' = L'$.

(2) 考虑逆否命题, 设 LL' 不为零, 那么只能是 $LL' = L' \neq 0$. 因此存在 $x' \in L'$ 使得左理想 $Lx' \neq 0$. 但 $Lx' \subset L'$,L' 是极小的. 故 $Lx' = L'$. 于是可定义映射

$$f : L \to L', f(x) = xx'.$$

不难验证 f 为满的模同态, 且 $\ker f \subset L$. 但 L 极小,$\ker f \neq L$, 故 $\ker f = 0$, 由此便得到同构.

定理 0.3.19 设 A 是域 K 上的有限维半单代数, 则环 A 由到它的极小双边理想的直和分解

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n,$$

从而

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n, e_i \in A_i, 1 \le i \le n.$$

其中 $e_1, e_2 \ldots, e_n$ 为 A 的两两不等的本原中心幂等元, 并且 $A_i = Ae_i$ 为单环 ,e_i 是 A 的单位元,$1 \le i \le n$. 于是所有不同构的不可约左模的个数等于 A 的本原中心幂等元的个数.

证要:A 设到它的极小左理想的一个直和分解式为

$$A = L_{11} \oplus \cdots \oplus L_{1m_1} \oplus \cdots \oplus L_{sm_s},$$

其中 $L_{ij} \cong L_{kt}$ 当且仅当 $i = k$.

命 $A_i = L_{i1} \oplus L_{i2} \oplus \cdots \oplus L_{im_i}, 1 \le i \le s$ 为 A 的左理想.

利用引理 0.3.18 便知对 $i \neq k$ 有 $A_i L_{kt} = 0$, 于是 $A_i A_k = 0$. 于是对 $x_j \in A_j, a = a_1 + \cdots + a_s, a_i \in A_i$ 便有 $x_j a = x_j a_j \in A$. 因此 A_i 也是右理想, 故 A_i 为双边理想.

设 $I \in A_i$ 是 A 的非零双边理想, 那么 I 必然是左理想, 因此 I 包含 A 的一个极小左理想 L, 设 $L \cong L_{kt}$, 若 $K \neq i$, 便得 $L_{kt} L \subset A_k A_i = 0$, 故 $L_{kt} = 0$, 矛盾! 故 $k = i$, 但 $L L_{it} = L_{it}$. 而 I 同时是右理想, 故 $L_{it} = L L_{it} \subset I, \forall t$. 故

$$A_i = \sum_{t=1}^{m_i} L_{it} \subset I.$$

从而 $I = A_i$, 这说明 I 是极小的. 余下便是引用定理 0.3.7, 推论 0.3.8 与推论 0.3.10 了.

注 定理中的 A_i 是单环, 它的单位元是 A 的本原中心幂等元 $e_i, 1 \le i \le s$.

证要: 只需证明 A_i 的双边理想一定是 A 的双边理想即可. 第二个结论由定理 0.3.7 推出.

接下来研究有限维半单代数的不可约子模的维数满足的条件.

首先请读者回忆引理 0.3.5(Schur).

定理 0.3.20(Wedderburn) 设 A 是域 K 上的有限维单代数,I 是环 A 的极小左理想, 令 $D = \mathrm{Hom}_A(I, I)$, 则

(1)D 是除环,I 是除环 D 上的有限维左线性空间,D 是域 K 上的有限维线性空间, 并且有等式

$$\dim_K I = (\dim_K D)(\dim_D I);$$

(2) 有域 K 上的代数同构

$$A \cong \mathrm{Hom}_D(I, I) \cong M_n(D^{op})$$

, 其中 $n = \dim_D I, M_n(D^{op})$ 为 D 上全体 n 阶方阵构成的集合.

证要:(1) 由引理 0.3.5 便知 D 是除环.

注意到 A 是域 K 上的线性空间, 而 I 是 A 的子集, 也是 Abel 群, 注意到 I 是左理想, 那么 $k \in K, x \in I$ 有 $kx = (k1_A)x \in I$, 因此 I 对 K 上的数乘封闭, 于是 I 成为线性空间 (K, A) 的子空间, 用 (K, I) 表示. 由 A 是有限维的知 $\dim_K I$ 有限.

定义运算:$D \times I \to I, dx := d(x), d \in D, x \in I$, 即 d 数乘 x 的值等于模同态 d 作用在 x 上的像, 这个运算使得 (D, I) 成为左线性空间. 取线性空间 (K, I) 的一组基 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, 那么对任意 $x \in I$ 有 $x = \sum\limits_{i=1}^n k_i \alpha_i, k_i \in K$, 对每个 k_i, 定义 $d_i : I \to I, d_i(x) = k_i x$, 则 $d_i \in D$, 且 $x = \sum\limits_{i=1}^n d_i \alpha_i$, 于是集合 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 生成线性空间 (D, I), 说明 $\dim_D I$ 有限.

定义运算 $K \times D \to D, (kd)(x) := d(kx) = d((k1_A)x) = (k1_A)d(x) = kd(x), k \in K, d \in D, x \in I$. 于是 D 成为 K 上的线性空间, 记作 (K, D).

考虑 (K,D) 上的线性无关集合 $X = x_1,\dots,x_m$, 再去 (D,I) 的一组基 $\{\beta_j\}_{j=1}^{l}$ 考察集合 Y=$\{x_i\beta_j|, 1\le i\le m, 1\le j\le l\}$, 设 $k_{ij}\in K$ 使得 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}k_{ij}x_i\beta_j=0$, 于是 $\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m}k_{ij}x_i\right)\beta_j=0$, 由 $\{\beta_j\}_{j=1}^{l}$ 线性无关知 $\sum_{i=1}^{m}k_{ij}x_i=0$, 再由 X 线性无关知 $k_{ij}=0$, 故集合 Y 线性无关. 但是 $\dim_K I$ 有限, 故 $m\dim_D I=ml\le n=\dim_K I$. 这说明 $\dim_K D$ 有限. 若取 $\{\gamma_t\}_{t=1}^{s}$ 为 (K,D) 的一组基, 则与前面的证明相同, 得出 $\{\gamma_t\beta_j|1\le t\le s, 1\le j\le l\}$ 线性无关, 但这个集合生成 (K,I), 因此 $\dim_K I=(\dim_K D)(\dim_D I)$.

(2) 定义运算 $K\times\mathrm{Hom}_D(I,I)\to\mathrm{Hom}_D(I,I), (kf)(x):=k(f(x)), k\in K, f\in\mathrm{Hom}_D(I,I), x\in I$. 则 $\mathrm{Hom}_D(I,I)$ 成为域 K 上的代数.

对 $b\in A$, 定义映射 $b_L: I\to I, b_L(x)=bx, x\in I$, 则 $b_L(dx)=b(d(x))=d(bx)=d(b_L(x)), b\in A, d\in D, x\in I$, 故 $b_L\in\mathrm{Hom}_D(I,I)$.

于是, 令 $\sigma: A\to\mathrm{Hom}_D(I,I), \sigma(b)=b_L$, 不难证明 σ 是代数同态.$\ker\sigma$ 是 A 的双边理想, 但 A 是单环,$1_I\in\mathrm{Im}\sigma$, 故只能是 $\ker\sigma=0$, 即 σ 是单同态.

定义 $A_L:=\{b_L|b\in A\}=\mathrm{Im}\sigma$, 目的是证明 $\mathrm{Hom}_D(I,I)\subset A_L$. 由于 A_L 包含了 $\mathrm{Hom}_D(I,I)$ 的单位元 $\sigma(1_A)$, 因此只需证明 A_L 为左理想. 取 $f\in\mathrm{Hom}_D(I,I), b_L\in A_L$, 考虑 fb_L. 由 A 单不难证明 $IA=A$, 于是 A 中元素均可写为 $a=\sum_{i=1}^{m}r_ia_i, r_i\in I, a_i\in A$, 于是有

$$fb_L(a)=\sum_{i=1}^{m}f(br_ia_i).$$

考虑映射 $\tau_i: I\to I, \tau_i(x)=xr_ia_i$, 则 $\tau_i\in D$, 于是 $f(br_ia_i)=f(\tau_ib)=\tau_i(f(b))=f(b)r_ia_i$. 综合以上两式便有 $fb_L(a)=f(b)a=(f(b))_La$, 这说明 $fb_L\in A_L$, 因此 A_L 是左理想, 故命题成立.

对下一个同构, 设 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 是 $\mathrm{Hom}_D(I,I)$ 一组基, 那么对 $f\in\mathrm{Hom}_D(I,I)$, 存在矩阵 $A:=(a_{ij})_{n\times n}$ 使得 $f(x_j)=\sum_{i=1}^{n}a_jix_j$. 定义 $\delta:=\mathrm{Hom}_D(I,I)\to M_n(D^{op}), \delta(f)=A$, 余下便是计算问题了.

定理 0.3.21 设 D 是除环, 则 $M_n(D)$ 是单环, 并且有到它的彼此同构的极小左理想的直和分解

$$M_n(D)=M_n(D)E_{11}\oplus M_n(D)=M_n(D)E_{22}\oplus\cdots\oplus M_n(D)=M_n(D)E_{nn},$$

其中 E_{ii} 表示在 (i,i) 处取 1(D 的单位元), 其余取 0 的矩阵, 并且极小左理想的个数等于矩阵的阶数 n.

这个定理的证明是普通的线性代数内容, 我们不再赘述.

由前述多个定理便得到

推论 0.3.22 设 A 是域 K 上的有限维单代数,I 是 A 的一个极小左理想, 令 $D=\mathrm{Hom}_A(I,I)$, 则 A 有到它的彼此同构的极小左理想的直和分解, 其中极小左理想的个数等于 $\dim_D I$.

定理 0.3.23 设 A 是域 K 上的有限维半单代数,A 到它的极小左理想的一个直和分解式为

$$A=L_{11}\oplus\cdots\oplus L_{1m_1}\oplus\cdots\oplus L_{sm_s},$$

其中 $L_{ij} \cong L_{kt}$ 当且仅当 $i = k$.

令:

$$\begin{aligned}
&A_i = L_{i1} \oplus L_{i2} \oplus \cdots \oplus L_{im_i}, i = 1, 2, \dots, s;\\
&D_i = \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1}), i = 1, 2 \dots, s;\\
&n_i = \dim_{D_i}(L_{i1}), i = 1, 2, \dots, n\\
&\tilde{n_i} = \dim_K(L_{i1}), i = 1, 2 \dots, s.
\end{aligned}$$

则 L_{i1} 在 A 中的重数 $m_i = n_i (i = 1, 2, \dots, s)$, 从而

$$\dim_K A = \sum_{i=1}^{s} n_i \tilde{n_i}.$$

其中 s 为 A 的本原中心幂等元的个数.

这是对前面许多定理的综合.

引理 0.3.24(Schur) 设 A 是代数闭域 K 上的代数,V 是有限维不可约左 A-模, 令 $D = \mathrm{Hom}_A(V, V)$, 则

$$D = K1_V \cong K.$$

于是 D 是一个域.

证要: 对 $d \in D, x \in V, k \in K$, 有 $d(kx) = d((k1_A)x) = (k1_A)d(x) = kd(x)$, 于是 $d \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. 由于 K 为代数闭域, 那么域 K 上的线性变换 d 有特征值 $\lambda \in K$. 考虑特征子空间 V_λ, 对 $a \in A, v \in V_\lambda$, 有 $d(av) = ad(v) = a(\lambda v) = \lambda(av)$, 故 $av \in V_\lambda$, 这说明 V_λ 是左 $A-$ 模, 但 $V_\lambda \subset V$ 且非零, 故 $V_\lambda = V$, 故 $d = \lambda 1_V \in K1_V$. 由此不难得出 $D = K1_V \cong K$.

定理 0.3.25 设 A 是代数闭域 K 上的有限维半单代数, 记号同定理 0.3.23, 则有环同构

$$D_i \cong K, i = 1, 2, \dots, s,$$

从而 $m_i = n_i = \dim_K(L_{i1})$, 并且

$$\dim_K A = \sum_{i=1}^{s} [\dim_K(L_{i1})]^2,$$

其中 s 为 A 的本原中心幂等元的个数.

于是所有不同构的不可约左 A-模的维数的平方和等于 A 的维数.

第二章的铺垫就此结束.

0.4 张量积

本节提供第四章所需的张量积知识.

定义 0.4.1 设 A 是环 R 上的右模,B 是环 R 上的左模,C 是 (加法)Abel 群, 如果映射 $f : A \times B \to C$ 满足:

(1)$f(a+a',b)=f(a,b)+f(a,b')$;

(2)$f(a,b+b')=f(a,b)+f(a,b')$;

(3)$f(ar,b)=f(a,rb)$;

则称 f 是从 $A\times B$ 的一个平衡映射.

注意, 我们设 A 是右模是为了保证 (3) 的合理性.

定义 0.4.2 设 A 是环 R 上的右模,B 是环 R 上的左模,C 是 (加法)Abel 群, 如果存在一个 Abel 群 D 和一个从 $A\times B$ 到 D 的平衡映射 t, 使得对任一平衡映射 $f: A\times B\to C$, 都存在唯一的群同态 f^*, 使得 $f=f^*t$, 即下图可交换

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"] & D \arrow[d, "f^*"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

则称 (D,t) 为 A 与 B 的一个张量积, 将 D 记为 $A\otimes_R B$, 将 (a,b) 在平衡映射下的像 $t(a,b)$ 记为 $a\otimes b$.

下述定理给出了张量积的存在性和 (同构意义下的) 唯一性, 其中唯一性的方法在很多场合通用.

定理 0.4.1 定义 0.4.2 中的张量积存在且在同构意义下唯一.

证要: 存在性: 设 G 是集合 $A\times B$ 生成的自由 Abel 群, 设 H 是 G 的由下述元素生成的子群

$$\begin{aligned}
&(a+a',b)-(a,b)-(a',b)\\
&(a,b+b')-(a,b)-(a,b')\\
&(ar,b)-(a,rb)
\end{aligned}$$

令 $D=G/H$,$t: A\times B\to D, t(a,b):=(a,b)+H$, 由 H 的构造知 t 为平衡映射. 不难证明 (D,t) 便是我们所需要的张量积.

唯一性是显然的, 因为张量积 $A\otimes_R B$ 是一个泛映射问题的解.

注 (1) 由该定理的构造不难知道张量积满足如下运算律

$$\begin{aligned}
&(a+a')\otimes b=a\otimes b+a'\otimes b\\
&a\otimes(b+b')=a\otimes b+a\otimes b'\\
&(ar)\otimes b=a\otimes(rb).
\end{aligned}$$

其中 $a,a'\in A, b,b'\in B, r\in R$.

(2) 由我们的构造方式, 显然集合 $\{a\otimes b|a\in A,b\in B\}$ 是 $A\otimes_R B$ 的一组生成元, 但其通常不构成一组基, 因此 $A\otimes_R B$ 中每个元素都能写成 $\sum\limits_i a_i\otimes b_i$ 的形式, 但写法并不是唯一的. 因此我们在定义从 $A\otimes_R B$ 到某个群 C 的同态映射 f 时, 不能直接通过定义 f 在 $\{a\otimes b|a\in A,b\in B\}$

上的值定义 f, 这样无法保证 f 定义的合理性. 为了合理地定义 f, 我们通常选择利用定义 0.4.2 先定义 $A\times B$ 到 C 的平衡映射, 再利用张量积的定义得到 f.

附加一些条件就能使张量积成为一个模.

定义 0.4.3 设 S,R 是两个环, 若 Abel 群 A 既是左 S-模又是右 R-模, 且满足

$$(sm)r=s(mr),\forall s\in S,m\in A,r\in R,$$

那么称 A 是 (S,R)-双模.

例 0.4.1 (1) 每个环 R 都是 (R,R)-双模;

(2) 设 R 是交换环, 那么左 R-模 A 在如下运算 $ar:=ra$ 下成为右 R-模与 (R,R)-双模. 右 R-模也在类似的运算下成为左 R-模与 (R,R)-双模;

(3) 对任意环 R, 左 R-模 A 都是 $(R,\mathbb{Z})$-双模, 其中 $an,a\in A,n\in\mathbb{Z}$ 定义为 n 个 a 的和. 同样地, 右 R-模也是 $(\mathbb{Z},R)$ 双模.

定理 0.4.2 条件同定义 0.4.2.

(1) 若 A 是 (S,R)-双模, 那么 $A\otimes_R B$ 是左 S-模.

(2) 若 B 是 (R,S)-双模, 那么 $A\otimes_R B$ 是右 S-模.

证要: 只证 (1),(2) 类似.

我们需要给出 $S\times A\otimes_R B$ 到 $A\otimes_R B$ 的一个映射. 对 $s\in S$, 定义

$$\begin{aligned}f_s:&A\times B\to A\otimes_R B\\&(a,b)\mapsto (sa)\otimes b.\end{aligned}$$

容易验证 f 是一个平衡映射, 因此由定义 0.4.2 存在唯一的群同态 $\psi_s:A\otimes_R B\to A\otimes_R B$ 满足 $f_s=\psi_s t$.

现在定义 $s\left(\sum_i a_i\otimes b_i\right):=\psi_s\left(\sum_i a_i\otimes b_i\right)$, 注意到 ψ_s 是合理定义的, 因此这个运算是合理定义的.

接下来不难验证 $A\otimes_R B$ 在上述运算下成为左 S-模, 并且该运算满足 $s(a\otimes b)=(sa)\otimes b,\forall s\in S,a\in A,b\in B$.

定理 0.4.3 设 $f:A\to A'$ 是右 R-模同态,$g:B\to B'$ 是左 R-模同态, 那么存在唯一的群同态 $\varphi:A\otimes_R B\to A\otimes_R B$ 满足

$$\varphi(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b),\forall a\in A,b\in B.$$

记这个 φ 为 $f\otimes g$.

证要: 仍然是老套路. 定义

$$\begin{aligned}\psi:&A\times B\to A'\otimes_R B'\\&(a,b)\mapsto f(a)\otimes g(b).\end{aligned}$$

显然这是一个平衡映射, 于是由定义 0.4.2, 存在唯一的群同态 $\varphi A\otimes_R B\to A'\otimes_R B'$ 满足 $\psi=\varphi t$.

此时 $\varphi(a\otimes b)=(\varphi\circ t)(a,b)=\psi(a,b)=f(a)\otimes g(b)$, 于是 φ 满足题设.

至于唯一性, 注意到集合 $\{a\otimes b|a\in A,b\in B\}$ 是 $A\otimes_R B$ 的一组生成元, 因此 φ 的值被它在所有 $a\otimes b$ 上的取值唯一确定.

定理 0.4.4 设 A,A',A'' 都是右 R-模,B,B',B'' 都是左 R-模, 且有模同态

$$f:A\to A',f':A'\to A'',g:B\to B',g'\to B'',$$

那么

$$(f'\otimes g')(f\otimes g)=(f'f)\otimes(g'g).$$

证要: 注意到二者均将 $a\otimes b$ 映为 $(f'f)(a)\otimes(g'g)(b)$, 因此由定理 0.4.2 中的唯一性即知二者相等.

推论 0.4.5 若定理 0.4.3 中 f,g 均是模同构, 则 $f\otimes g$ 是 Abel 群同构.

证要: 容易验证 $1_A\otimes 1_B=1_{A\otimes_R B}$ 是 $A\otimes_R B$ 上的恒等映射, 于是由

$$(f\otimes g)(f^{-1}\otimes g^{-1})=(ff^{-1})\otimes(gg^{-1})=1'_A\otimes 1'_B=1_{A'\otimes_R B'}$$
$$(f^{-1}\otimes g^{-1})(f\otimes g)=(f^{-1}f)\otimes(g^{-1}g)=1_A\otimes 1_B=1_{A\otimes_R B}$$

知 $f\otimes g$ 是群同构.

下面是张量积的基本性质:

定理 0.4.6(交换律) 设 R 是交换环,A,B 是 R-模, 那么有 R-模同构

$$A\otimes_R B\cong B\otimes_R A.$$

证要: 由于 R 是交换环, 因此 A,B 自然是 (R,R)-双模, 于是定理 0.4.2 告诉我们 $A\otimes_R B$ 与 $B\otimes_R A$ 都是 (R,R)-双模.

现在定义

$$\begin{aligned} f:&A\times B\to B\otimes_R A\\ &(a,b)\mapsto b\otimes a. \end{aligned}$$

容易验证这是一个平衡映射.(注意到 $ar=ra,br=rb,a\in A,b\in B,r\in R$, 见例 0.4.1(2)). 于是由定义 0.4.2, 存在唯一的群同态 $\varphi:A\otimes_R B\to B\otimes_R A$ 满足 $f=\varphi t$.

此时 $\varphi(a\otimes b)=(\varphi\circ t)(a,b)=f(a,b)=b\otimes a$.

类似地, 存在群同态 $\psi B\otimes_R A\to A\otimes_R B$ 满足 $\psi(b\otimes a)=(a\otimes b)$.

容易验证 $\varphi\circ\psi$ 是 $B\otimes_R A$ 上的恒等映射,$\psi\circ\varphi$ 是 $A\otimes_R B$ 上的恒等映射, 于是 φ 是群同构.

由 $\varphi(r(a\otimes b))=\varphi((ra)\otimes b)=b\otimes(ra)=(br)\otimes a=(rb)\otimes a=r(b\otimes a)=r\varphi(a\otimes b)$ 不难知道 φ 也是左 R-模同构, 同理 φ 是右 R-模同构, 于是命题成立.

定理 0.4.7(结合律) 设 A 是右 R-模,B 是 (R,S)-双模,C 是左 S-模, 那么有 Abel 群同构

$$(A\otimes_R B)\otimes_S C\cong A\otimes_R(B\otimes_S C).$$

如果 A 是 (H,R)-双模, 那么上述同构还是左 H-模同构; 若 C 是 (S,L)-双模, 那么该同构还是右 L-模同构.

证要: 由定理 0.4.2 知 $(A\otimes_R B)$ 是右 S-模, 因此 $(A\otimes_R B)\otimes_S C$ 有意义, 同样地,$A\otimes_R(B\otimes_S C)$ 也有意义.

证明的思路是定义从 $A\times B\times C$ 到某个 Abel 群 G 的平衡映射 f:

$$\begin{aligned}
&f(a+a',b,c)=f(a,b,c)+f(a',b,c)\\
&f(a,b+b',c)=f(a,b,c)+f(a,b',c)\\
&f(a,b,c+c')=f(a,b,c)+f(a,b,c')\\
&f(ar,b,c)=f(a,rb,c)\\
&f(a,bs,c)=f(a,b,sc).
\end{aligned}$$

其中 $a,a'\in A,b,b'\in B,c,c'\in C,r\in R,s\in S$.

然后证明 $(A\otimes_R B)\otimes_S C$ 与 $A\otimes_R(B\otimes_S C)$ 都是如下泛映射问题的解:

存在 Abel 群 D 与平衡映射 $t: A\times B\times C\to D$ 使得对任意 Abel 群 G 与平衡映射 $f: A\times B\times C\to G$, 存在唯一的群同态 $\varphi: D\to G$ 满足 $f=\varphi\circ t$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A\times B\times C \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"'] & D \arrow[d, "\varphi"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

不难证明 $(A\otimes_R B)\otimes_S C$ 与 $A\otimes_R(B\otimes_S C)$ 都是上述泛映射问题的解, 因此它们 (作为 Abel 群) 同构. 并且对 $(A\otimes_R B)\otimes_S C$ 来说 $t(a,b,c)=(a\otimes b)\otimes c$, 对 $A\otimes_R(B\otimes_S C)$ 来说 $t'(a,b,c)=a\otimes(b\otimes c)$, 于是同构映射将 $(a\otimes b)\otimes c$ 映为 $a\otimes(b\otimes c)$.

当 A 是 (H,R)-双模时只需验证上述同构也是左 H-模同构即可. 另外一个结论也是类似.

张量积保持直和:

定理 0.4.8 (1) 设 A 是右 R-模, 再给定一族左 R-模 $\{B_i,i\in I\}$, 那么有 Abel 群同构

$$A\otimes_R\left(\sum_{i\in I}B_i\right)\cong\sum_{i\in I}A\otimes_R B_i.$$

若 A 是 (S,R)-双模, 那么该同构还是左 S-模同构; 若每个 B_i 都是 (R,H)-双模, 那么该同构还是右 H-模同构.

(2) 给定一族右 R-模 $\{A_i,i\in I\}$, 设 B 是左 R-模, 那么有 Abel 群同构

$$\left(\sum_{i\in I}A_i\right)\otimes_R B\cong\sum_{i\in I}A_i\otimes_R B.$$

若每个 A_i 都是 (S,R)-双模, 那么该同构还是左 S-模同构; 如果 B 是 (R,H)-双模, 那么该同构还是右 H-模同构.

证要: 只证 (1) 中的群同态.

$f: A \times \left(\sum_{i\in I} B_i\right) \to \sum_{i\in I} A \otimes_R B_i, f(a, \{b_i\}_{i\in I}) = \{a \otimes b_i\}_{i\in I}$ 是平衡映射, 因此据定义 0.4.2 存在唯一的群同态 $\varphi: A \otimes_R \left(\sum_{i\in I} B_i\right) \to \sum_{i\in I} A \otimes_R B_i$ 满足 $\varphi(a \otimes \{b_i\}_{i\in I}) = \{a \otimes b_i\}_{i\in I}$.

另一方面, 对每个 $i \in I$, 据直和的定义, 可将 B_i 看成 $\sum_{i\in I} B_i$ 的子模, 设 $\lambda_i : B_i \to \sum_{i\in I} B_i$ 是相应的包含映射 (即 $\lambda_i(b)$ 的第 i 个坐标为 b 其余坐标为 0), 那么有平衡映射 $g_i : A \times B_i \to A \otimes_R \left(\sum_{i\in I} B_i\right)$ 使得 $g_i(a, b) = a \otimes \lambda_i(b)$, 于是据张量积定义存在群同态 $\psi_i : A \otimes_R B_i \to A \otimes_R \left(\sum_{i\in I} B_i\right)$ 满足 $\psi_i(a \otimes b) = a \otimes \lambda_i(b)$. 于是据 Abel 群的直和的泛性质, 存在唯一的群同态 $\psi : \sum_{i\in I} A \otimes_R B_i \to A \otimes_R \left(\sum_{i\in I} B_i\right)$ 满足 ψ 限制在子群 $A \otimes_R B_i$ 上即是 ψ_i, 并且 $\psi(\{a \otimes b_i\}_{i\in I}) = a \otimes \{b_i\}_{i\in I}$.

容易验证 φ 和 ψ 互为逆映射, 它们便是我们需要找的同构.

下面是一个常用的小结论.

定理 0.4.9 (1) 设 B 是左 R-模, 那么有左 R-模同构 $R \otimes_R B \cong B$;

(2) 设 A 是右 R-模, 那么有右 R-模同构 $A \otimes_R R \cong R$.

证要: 只证 (1).

由于 R 是 (R, R)-双模, 因此 $R \otimes_R B$ 是左 R-模.

有平衡映射 $f : R \times B, f(r, b) = rb$, 因此由定义 0.4.2 存在唯一的群同态 $g : R \otimes_R B \to B$ 满足 $g(r \otimes b) = rb$, 显然这也是左 R-模同态.

现在有左 R-模同态 $h : B \to R \otimes_R B, h(b) = 1 \otimes b$, 容易验证 g, h 互为逆映射, 因此是同态.

接下来考虑域 K 上线性空间的张量积. 由于域是交换环, 因此每个线性空间都是 (K, K)-双模, 因此线性空间的张量积自然是线性空间. 我们在高等代数课程中学习了双线性映射, 它自然也是一种平衡映射 (注意此处 K 的乘法交换性是不可少的, 否则只能定义平衡映射而不能定义双线性映射).

下面一个定理实际上是通常的线性代数或者高等线性代数中对线性空间的张量积的定义, 这个定理说明我们在定义 0.4.2 中定义的张量积与之一致.

定理 0.4.10 设 V, W 是域 K 上的线性空间, 那么张量积 $V \otimes_K W$ 是下述泛映射问题的解 D:

存在线性空间 D 与双线性映射 $t : V \times W \to D$, 使得对于任意线性空间 C 与双线性映射 $f : V \times W \to C$, 存在唯一的线性映射 $g : D \to C$ 满足 $f = g \circ t$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"'] & D \arrow[d, "G"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

证要: 取 D 是定义 0.4.2 中的张量积 $V \otimes_K W$ 与平衡映射 t, 定理 0.4.2 告诉我们它其实是

一个线性空间, 并且容易知道 t 其实就是一个双线性映射 (因为 $kt(a,b) = k(a\otimes b) = (ka)\otimes b = (ak)\otimes b = t(ak,b)$). 现在 f 是平衡映射,C 是 Abel 群, 因此据定义 0.4.2 存在 Abel 群同态 $g: V\otimes_K W \to C$, 然后在验证这个 g 是线性映射即可.

线性空间有基有维数, 同时有限维线性空间之间的线性变换是与矩阵对应的.

定理 0.4.11 设 V, W 是域 K 上的有限维线性空间, 那么 $(\dim_K V)(\dim_K W) = \dim(V\otimes_K W)$. 取 V 的一组基 $\{v_i, 1\le i\le s\}$,W 的一组基 $\{w_j, 1\le j\le t\}$, 那么 $\{v_i\otimes w_j, 1\le i\le s, 1\le j\le t\}$ 是线性空间 $V\otimes_K W$ 的一组基.

证要: 依题意 $\dim_K W = t$, 于是有线性同构 $W\cong \sum\limits_{j=1}^{t} K$, 利用定理 0.4.8 与定理 0.4.9 知 $V\otimes_K W \cong V\otimes_K \left(\sum\limits_{j=1}^{t} K\right) \cong \sum\limits_{j=1}^{t} V\otimes_K K \cong \sum\limits_{j=1}^{t} V$, 于是 $\dim(V\otimes_K W) = \dim\left(\sum\limits_{j=1}^{t} V\right) = t\dim_K V = (\dim_K V)(\dim_K W) = st$.

现在 $\{v_i\otimes w_j, 1\le i\le s, 1\le j\le t\}$ 至多含有 st 个元素, 如果能证明其线性无关, 那么这个集合恰好含有 st 个线性无关的元素, 结合 $\dim(V\otimes_K W) = st$ 知这个集合必是一组基.

现在设 $\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{t} k_{ij}(v_i\otimes w_j) = 0, k_{ij}\in K$, 于是 $\sum\limits_{i=1}^{s}\left(\sum\limits_{j=1}^{t} k_{ij}v_i\right)\otimes w_j = 0$, 记 $c_j = \sum\limits_{j=1}^{t} k_{ij}v_i$, 现在有一个神奇的寄巧, 设 W^* 为 W 的对偶空间, 考虑 W 关于基 $\{w_j, 1\le j\le t\}$ 的对偶基 $\{w_j^*, 1\le j\le t\}$, 即 $w_j^*(w_i) = 0$, 当 $i\ne j$,$w_j^*(w_j) = 1$. 设 1_V 是 V 上的恒等映射, 再令 g 是定理 0.4.9 中的同构映射, 即 $g: V\otimes_K K\to K, g(v\otimes k) = vk = kv$, 此时

$$\begin{aligned}
0 &= (g\circ(1\otimes w_j^*))\left(\sum_{i=1}^{t} c_i\otimes w_i\right)\\
&= \sum_{i=1} g((1\otimes w_j^*)(c_i\otimes w_i))\\
&= g(c_i\otimes 1)\\
&= c_i.
\end{aligned}$$

于是对每个 i 有 $\sum\limits_{j=1}^{t} k_{ij}v_i = 0$, 由 $\{v_i, 1\le i\le s\}$ 是一组基便得到 $k_{ij} = 0$. 于是 $\{v_i\otimes w_j, 1\le i\le s, 1\le j\le t\}$ 线性无关.

最后是关于矩阵的定理.

定理 0.4.12 设 V, V', W, W' 是域 K 上的有限维线性空间,$\dim_K V = s, \dim_K V' = s', \dim_K W = t, \dim_K W' = t'$, 设有线性映射 $f: V\to V', g: W\to W'$, 在四个线性空间中分别取定一组基 $\{v_i, 1\le i\le s\}$,$\{v_i', 1\le i\le s'\}$,$\{w_j, 1\le j\le t\}$,$\{w_j', 1\le j\le t'\}$, 设 f, g 对应的矩阵为 $A = (a_{ij})_{s'\times s}, B = (b_{ij})_{t'\times t}$, 那么线性映射 $f\otimes g$ 在基 $\{v_i\otimes w_j, 1\le i\le s, 1\le j\le t\}$,$\{v_i'\otimes w_j', 1\le$

$i \leq s', 1 \leq j \leq t'\}$ 下对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1s}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2s}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s'1}B & a_{s'2}B & \dots & a_{s's}B \end{pmatrix}$$

将该矩阵记为 $A \otimes B$, 称其为矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积.

证要: 直接计算即可

0.5 环、模与代数再补充

本节内容主要为第五章第 3 节作补充.

定义 0.3.13 中已经给出了 Noether 模与 Artin 模的定义, 接下来给出环的相应定义.

定义 0.5.1 考虑环 R.

(1) 若对 R 的任意左理想升链 $I_1 \subset I_2 \subset \dots$, 一定存在正整数 n 使得一切 $i \geq n$ 都有 $I_i = I_n$, 则称 A 满足左理想的升链条件 (ACC), 或称 A 是左 Noether 环;

(2)(1) 若对 R 的任意左理想降链 $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, 一定存在正整数 n 使得一切 $i \geq n$ 都有 $I_i = I_n$, 则称 A 满足左理想的降链条件 (DCC), 或称 A 是左 Artin 环.

类似地可定义右 Noether 环与右 Artin 环. 注意交换环中左、右、双边理想相同, 因此直接称交换环 R 是 Noether 或 Artin 环而不必区分左右.

我们先给出一点例子:

例 0.5.1 (1) 域 K 上的有限维代数 A 是左、右的 Noether、Artin 环;

(2) 整数环 $\mathbb{Z}$ 是 Noether 环但不是 Artin 环;

(3) 形如 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, 其中 $a \in \mathbb{Z}, b, c \in \mathbb{Q}$ 的矩阵构成左 Noether 环而非右 Noether 环;

(4) 形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, 其中 $a \in \mathbb{Q}, b, c \in \mathbb{R}$ 的矩阵构成右 Artin 环而非左 Artin 环.

(5) 交换 Noether 环 R 上的多项式环 $R[x_1, \dots, x_n]$ 是 Noether 环.

证要:(1) 注意 A 的左、右理想都是域 K 上的有限维线性空间, 而理想的严格包含关系蕴含线性空间的严格包含关系, 进一步蕴含着维数的严格递增或递减, 而 A 是有限维的, 故这样的严格包含关系至多有 $\dim_K A$ 个;

(2)$\mathbb{Z}$ 是主理想整环, 因此第一个结论是下一个定理的特殊情况;

$\mathbb{Z}$ 有理想的严格降链 $(2) \supset (2^2) \supset (2^3) \supset \dots$, 故不为 Artin 环.

(3) 记这个环为 R.

注意到 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ na & 0 \end{pmatrix}$, 于是 $I_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{m}{2^n} & 0 \end{pmatrix} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}$ 是右理想, 且 I_n 真包含于 I_{n+1}, 于是有右理想的无穷升链 $I_1 \subset I_2 \subset \dots$, 故这个环不是右 Noether 环.

定义 $f: R \to \mathbb{Z}, f\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = a$, 显然这是一个环同构, 并且 f 将 R 的左理想 I 映射为 $\mathbb{Z}$ 的理想 $f(I)$.

假设有 (无穷) 左理想升链 $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$, 那么便有 $\mathbb{Z}$ 的理想升链 $f(I_1) \subset f(I_2) \subset \ldots$,(2) 告诉我们 $\mathbb{Z}$ 是 Noether 环, 于是存在 n 使得对一切 $i \geq n$ 满足 $f(I_i) = f(I_n)$,$\mathbb{Z}$ 是主理想整环, 故存在正整数 m 使得 $f(I_n) = (m)$, 令 $J = f^{-1}((m)) = \left\{ \begin{pmatrix} km & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z}, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$, 于是 $I_i \subset J(i \geq n)$. 注意到 $m \in f(I_i)$, 故对每个 $k \in \mathbb{Z}$, 存在 b, c 使得 $\begin{pmatrix} km & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in I_i$. 现在令 $B_i = \left\{ |s| | s \in \mathbb{Z}, \text{存在} c \neq 0, b \in \mathbb{Q} \text{使得} \begin{pmatrix} sm & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in I_i \right\}$

(i) 若 $B_i = \varnothing$, 那么 $I_i \subset \left\{ \begin{pmatrix} km & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q} \right\}$. 取 $b' \in \mathbb{Q}$ 使得 $\begin{pmatrix} m & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in I_i$, 那么对每个 $b \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{Z}$, 有 $\begin{pmatrix} km & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ m^{-1}b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} \in I_i$, 故 $I_i = \left\{ \begin{pmatrix} km & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

(ii) 若 B_i 非空, 因其是自然数集的非空子集, 故其有最小元 $t \geq 0$. 接下来我们证明必有 $1 \in B_i$.

注意到 $\begin{pmatrix} km & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in I_i$ 当且仅当 $\begin{pmatrix} |k|m & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in I_i$, 于是若 $t \geq 2$, 那么存在 $c \neq 0, b, b' \in \mathbb{Q}$ 使得 $\begin{pmatrix} tm & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in I_i, \begin{pmatrix} (t-1)m & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} \in I_i$, 相减便得 $\begin{pmatrix} m & 0 \\ b - b' & c \end{pmatrix} \in I_i$, 于是 $1 \in B_i$, 与 $s \geq 2$ 矛盾! 故总有 $s = 0$ 或 1, 若 $s = 0$ 但 $1 \neq B_i$, 那么存在 $c \neq 0, b, b' \in \mathbb{Q}$ 使得 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in I_i, \begin{pmatrix} m & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} \in I_i$, 两式相减便得 $\begin{pmatrix} m & 0 \\ b' - b & -c \end{pmatrix} \in I_i$, 故 $1 \in B_i$, 矛盾! 于是若 $s = 0$ 则必有 $1 \in B_i$.

综上:$1 \in B_i$, 于是存在 $c' \neq 0, b' \in \mathbb{Q}$ 使得 $\begin{pmatrix} m & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in I_i$, 于是对一切 $k \in \mathbb{Z}, b, c \in \mathbb{Q}$ 有 $\begin{pmatrix} km & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ m^{-1}(b - b'c'^{-1}c) & c'^{-1}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in I_i$, 故 $I_i = J$.

综上, 对任意 $i \geq n$,I_i 只有两种可能的取值, 且 (i) 中的取值真包含于 (ii) 中的取值, 据此不难得出一定有某个 $n' \geq n$, 使得对一切 $i \geq n', I_i = I_{n'}$, 这说明 R 是左 Noether 环.

(4) 记这个环为 R.

注意到 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 注意到 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的无穷维线性空间, 取其一组基 X, 在 X 中取一列互不相同的数 $\{x_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$, 记 V_n 是由 $X - \{x_1, \ldots, x_n\}$ 生成的 $\mathbb{Q}$-线性空间, 那么 V_{n+1} 真包含于 V_n, 此时 $I_n := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| v_n \in V_n \right\}$ 是左理想, 且 I_{n+1} 真包含于

I_n, 于是有左理想的无穷降链 $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, 故此环不是左 Artin 环.

通过一系列麻烦但不是很难的讨论可以知道, 环 R 的右理想形如:

$0, R, J_1 = \left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 0 \end{array}\right) \middle| a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}\right\}, J_2 = \left\{\left(\begin{array}{cc} 0 & b \\ 0 & 0 \end{array}\right) \middle| b \in \mathbb{R}\right\}, J_3 = \left\{\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & c \end{array}\right) \middle| c \in \mathbb{R}\right\}, J_4 = \left\{\left(\begin{array}{cc} 0 & b \\ 0 & c \end{array}\right) \middle| b, c \in \mathbb{R}\right\}$, 以及 $J_{b,c} = \left\{\left(\begin{array}{cc} 0 & bd \\ 0 & cd \end{array} \middle| d \in \mathbb{R}\right)\right\}, bc \neq 0$. 并且 $J_{b,c}$ 与 $J_{b',c'}(bb'cc' \neq 0)$ 要么相等要么互相不包含.

现在假设 R 不是右 Artin 环, 那么有右理想无穷降链 $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, 不妨设每个包含关系都是真包含, 现在 $J_{b,c}(bc \neq 0)$ 的性质告诉我们形如 $J_{b,c}$ 的理想至多在这个降链中出现一次, 现在其他的右理想一共只有有限个, 而该降链中任意两个理想互不相等, 因此除去 $J_{b,c}$ 之外的其他右理想也只能出现有限次, 这边与无穷降链矛盾! 故 R 是右 Artin 环.

(5) 这是著名的 Hilbert 基定理, 在交换代数与代数几何中非常重要, 我们将它的证明放在后面 (见定理 0.5.3).

接下来两个定理给出了环 R 成为 Noether 环或 Artin 环的充要条件:

定理 0.5.1 环 R 上如下三个条件等价:

(1)R 是 Noether 环;

(2)R 的每个左理想的非空族包含极大元素;

(3)R 的每个左理想都是有限生成的.

证要:(1)⇒(2): 用反证法, 假设 R 有一个左理想非空族 S 无极大元素, 取 $I_1 \in S$, 由于 S 无极大元素, 故存在 $I_2 \in S$, 以及真包含 $I_1 \subset I_2$, 同样取 I_3 使得有真包含 $I_2 \subset I_3$, 不断取下去得到 $I_1 \subset I_2 \subset \dots$, 每一个包含都是真包含, 与 (1) 矛盾! 故假设不成立, 即 (1) 蕴含 (2);

(2)⇒(3): 设 I 是 R 的一个左理想, 假设 I 不是有限生成的, 取 $a_1 \in I$,I 不是有限生成, 故存在 $a_2 \in I - (a_1)$, 同样取 $a_3 \in I - (a_1, a_2)$, 不断下去得到一列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \in I, a_{n+1} \notin (a_1, \dots, a_n)$, 考虑由 $(a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_1, \dots, a_n), \dots$ 构成的左理想的族, 由 (2) 知它有某个极大元素 $(a_1, \dots, a_m)$, 但这与 $(a_1, \dots, a_m, a_{m+1})$ 真包含 $(a_1, \dots, a_m)$ 矛盾!

(3)⇒(1): 设有左理想升链 $I_1 \subset I_2 \subset \dots$, 令 $I = \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j$, 易知 I 为左理想, 由 (3),I 有限生成, 设 $I = (a_1, \dots, a_m)$,$a_i \in I$, 故存在 n_i 使得 $a_i \in I_{n_i}$, 令 $n = \max_{1 \leq i \leq m} n_i$, 则 $a_i \in I_n, 1 \leq i \leq m$, 故 $I \subset I_n$, 于是任意 $n \geq i$ 有 $I_n \subset I_i \subset I \subset I_n$, 即 $I_i = I_n$, 故 R 为 Noether 环.

定理 0.5.2 环 R 上如下两个条件等价:

(1)R 是 Artin 环;

(2)R 的每个左理想的非空族包含极小元素.

证要:(1)⇒(2): 同上一个定理即可.

(2)⇒(1): 设有左理想降链 $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, 由 (2), 集合 $S = \{I_1, I_2, \dots, I_m, \dots\}$ 有极小元素 I_n, 易知对一切 $i \geq n$ 有 $I_i = I_n$, 故 R 为 Artin 环.

定理 0.5.3 左 Noether(Artin) 环的商环也是左 Noether(Artin) 环.

证要: 用商环的理想的对应定理即可.

我们先解决例 0.5.1 的 (5), 不过它与我们的主线并没有关系. 首先我们还需要一个引理

引理 0.5.4(H.Sarges) 交换环 R 是 Noether 环的充要条件是对任意一列元素 $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, 存在正整数 m 使得 $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} r_i a_i, r_i \in R$.

证要: 必要性: 考虑理想升链 $(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset (a_1, a_2, a_3) \subset \ldots$, 存在 m 使得 $(a_1, \ldots, a_m) = (a_1, \ldots, a_{m+1})$, 故 $a_{m+1} \in (a_1, \ldots, a_m)$, 因此 $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} r_i a_i, r_i \in R$;

充分性: 反证法, 假设 R 不是 Noether 环, 则有理想严格升链 $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$, 取 $a_n \in I_{n+1} - I_n$, 依题意, 存在正整数 m 使得 $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} r_i a_i, r_i \in R$, 这说明 $a_{m+1} \in I_m$, 这与 $a_{m+1} \in I_{m+1} - I_m$ 矛盾!

定理 0.5.5(Hilbert 基定理) 设 R 是交换 Noether 环, 则多项式环 $R[x_1, \ldots, x_n]$ 也是交换 Noether 环.

证要 (H.Sarges): 注意到 $R[x_1, \ldots, x_n] = R[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$, 故只需对 $n = 1$, 即对 $R[x]$ 的情况证明. 反证法, 设 $R[x]$ 有一个非有限生成的理想 I, 则 $I \neq 0$, 于是 I 包含一个次数最小的多项式 $f_0(x)$, 注意到 I 非有限生成, 因此 $I - (f_0(x))$ 非空, 故其包含一个次数最小的多项式 $f_1(x)$, 不断归纳地定义:$I - (f_0(x), \ldots, f_n(x))$ 非空, 定义 $f_{n+1}(x)$ 为 $I - (f_0(x), \ldots, f_n(x))$ 中次数最低的多项式. 由构造方法知 $\deg f_0 \leq \deg f_1 \leq \deg f_2 \ldots$.

记 a_n 为 $f_n(x)$ 首项系数, 由引理 0.5.4 存在正整数 m 使得 $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} r_i a_i, r_i \in R$. 再令 $d_i = \deg f_i$, 作多项式

$$f(x) := f_{m+1}(x) - \sum_{i=1}^{m} r_i x^{d_{m+1} - d_i} f_i(x),$$

注意到 $\deg f < \deg f_{m+1}$ 且 $f(x) \in I - (f_0(x), \ldots, f_m(x))$, 这便与 $f_{m+1}(x)$ 次数最低矛盾.

故假设不成立, 因此 $R[x]$ 是 Noether 环, 归纳便得 $R[x_1, \ldots, x_n]$ 也是交换 Noether 环.

接下来讨论一种特殊的理想:

定义 0.5.2 设 R 是环, 定义 $J(R)$ 为 R 中一切极大左理想的交, 称 $J(R)$ 为 R 的 Jacobson 根.

若 $J(R) = 0$, 则称 R 是 Jacobson 半单的.

注 后面我们将会证明,$J(R)$ 也等于 R 的所有极大右理想的交, 因此上述定义中并不需要区分左右. 实际上 $J(R)$ 还是双边理想.

还是举两个例子.

例 0.5.2 (1) 整数环 $\mathbb{Z}$ 是 Jacobson 半单环;

(2) 设 K 为域, 则环 $R = \mathrm{Mat}_n(K)$ 是 Jacobson 半单的.

证要:(1) 注意到 $\mathbb{Z}$ 中的极大理想是 $(p), p$ 为素数即可.

(2) 用 C_l 表示第 l 列以为 0 的矩阵, 由高等代数知识不难证明 C_l 是 R 的极大左理想, 于是 $J(R) \subset \bigcap_{l=1}^{n} C_l = 0$.

定理 0.5.6 设 R 是环, 则下面三个条件等价:

(1)$x \in J(R)$;

(2) 对每个 $r \in R, 1 - rx$ 有左逆;

(3) 对每个极大左理想 $I, x(R/I) = 0$(等价地, 对每个单左 R-模 M,$xM = 0$).

证要:(1)⇒(2): 反证, 设 $r \in R$ 使 $1 - rx$ 无左逆, 则左理想 $R(1 - rx)$ 不等于 R, 故它包含于某个极大左理想 I 中, 于是 $1 - rx \in R(1 - rx) \subset I$, 但 $x \in J(R) \subset I$, 故 $1 = (1 - rx) + rx \in I$, 故 $I = R$, 矛盾!

(2)⇒(3): 首先易知模 M 是单模当且仅当存在极大左理想 I 使得 $M \cong R/I$(左 R-模同构).

设单模 M 满足 $xM \neq 0$, 那么存在 $m \in M$ 满足 $xm \neq 0$, 于是子模 $Rxm \neq 0$, 但 M 为单模, 故 $Rxm = M$, 因此存在 $r \in R$ 使得 $m = rxm$, 即 $(1 - rx)m = 0$, 但由 (2),$1 - rx$ 有左逆, 故 $m = 0$, 矛盾!

(3)⇒(1): 由 $x(R/I) = 0$ 知 $x + I = x(1 + I) = 0$, 故 $x \in I$, 而 I 取遍所有极大左理想, 故 $x \in \bigcap\limits_{I\text{为极大左理想}} = J(R)$.

为探究 Jacobson 根的性质, 我们需要一些其它的定义.

定义 0.5.3 设 I 是环 R 的一个左理想, 若存在正整数 m 使得 $I^m = 0$, 则称 I 是幂零的.

下面两个命题描述了幂零左理想与 Jacobson 根的关系:

定理 0.5.7 设 R 是环,I 是幂零左理想, 则 $I \subset J(R)$.

证要: 设 $x \in I, I^m = 0$, 由 I 为左理想知任意 $r \in R$ 有 $(rx)^m \in I^m$, 故 $(rx)^m = 0$, 故 rx 为幂零元, 故 $1 - rx$ 为左可逆, 于是由定理 0.5.6 知 $x \in J(R)$, 故 $I \subset J(R)$.

定理 0.5.8 若 R 是左 Artin 环, 则 $J(R)$ 幂零.

证要: 将 $J(R)$ 简记为 J. 自然要考虑左理想降链 $J \supset J^2 \supset \ldots$,$R$ 是 Artin 环蕴含着存在 $n, J^n = J^{2n}$, 令 $I = J^n$, 则 $I = I^2$, 目的是证明 $I = 0$.

假设 $I \neq 0$, 设 S 是满足 $IB \neq 0$ 的一切左理想 B 的族, 由 $I^2 = I \neq 0$ 知 $I \in S$, 故 S 非空, 于是由定理 0.5.2 知 S 包含极小元素 $B_0 \in S$, 取 $b \in B_0$ 使得 $Ib \neq 0$, 显然 $b \neq 0$. 于是 $I(Ib) = I^2 b = Ib \neq 0$, 故 $Ib \subset B_0, Ib \in S$, 但 B_0 极小, 故 $Ib = B_0$, 但 $b \in B_0$, 于是存在 $x \in I$ 使得 $xb = b$, 于是 $(1 - x)b = 0$, 但 $x \in I \subset J = J(R)$, 故由定理 0.5.6,$(1 - x)$ 有左逆, 于是 $b = 0$, 矛盾!

故 $J^n = I = 0$, 故 $J(R)$ 幂零.

由上述两个定理立即得到:

推论 0.5.9 设 R 是 Artin 环, 则 $J(R)$ 等于一切幂零左理想的并.

定理 0.5.10 设 R 是 Artin 环, 则左理想 I 幂零当且仅当 I 中每一个元素幂零.

证要: 必要性显然.

充分性: 设 I 中每一个元素幂零, 考虑理想降链 $I \supset I^2 \supset \ldots$, 一定存在 n 使得 $I^n = I^{2n}$, 假设 $I^n \neq 0$, 利用定理 0.5.8 中类似的证明, 存在 $b \neq 0, x \in I$ 使得 $(1 - x)b = 0$.(注意定理 0.5.8 中与此相关的证明只用了 Artin 环的条件), 据题意,x 幂零, 故 $1 - x$ 可逆, 因此 $b = 0$, 矛盾! 故 $I^n = 0$, 即 I 幂零.

前面我们说过 $J(R)$ 是双边理想, 下面我们将会对其进行证明.

定义 0.5.4 设 M 是环 R 上的左模, 定义 M 的零化子为

$$\operatorname{ann}(M) := \{a \in R | \text{对一切} m \in M \text{有} am = 0\}.$$

显然零化子是 R 中的双边理想.

定理 0.5.11 $J(R) = \bigcap\limits_{I\text{为极大左理想}} \operatorname{ann}(R/I) = \bigcap\limits_{M\text{为单左}R\text{-模}} \operatorname{ann}(M).$

证要: 这是定理 0.5.6 的直接推论.

推论 0.5.12 $J(R)$ 是双边理想.

证要: 由定义 0.5.4 与定理 0.5.11,$J(R)$ 是一族双边理想的交, 自然是双边理想.

推论 0.5.13 $R/J(R)$ 是 Jacobson 半单环.

证要: 由推论 0.5.12,$J(R)$ 是双边理想, 故 $R/J(R)$ 是环 (这也是为什么我们把这个命题放在这). 由商环的理想的对应定理知 $J(R/J(R)) = j(R)/J(R) = 0$, 故 $R/J(R)$ 是 Jacobson 半单环.

最后说明 $J(R)$ 是一切极大右理想的交.

定理 0.5.14 设 R 是环, 则

(1)$J(R) = \{x \in R | \forall r, s \in R, 1 + rxs\text{是}R\text{中的单位}\}$;

(2) 设 $J(R')$ 是 R 的一切极大右理想的交, 则 $J'(R) = J(R)$.

证要:(1) 用 W 记 (1) 中等式右边的集合. 若 $x \in W$, 令 $s = -1$ 知对一切 $r \in R$ 有 $1 - rx$ 是单位, 自然有左逆, 因此由定理 0.5.6 知 $x \in J(R)$, 故 $W \subset J(R)$.

关于反包含, 取 $x \in J(R)$, 已证 $J(R)$ 是双边理想, 故对任意 $s \in R$,$xs \in J(R)$, 于是由定理 0.5.6 知对一切 $r \in R, 1 + rxs = 1 - (-r)xs$ 有左逆 u, 则 $u(1 + rxs) = 1$, 于是 $u = 1 - (ur)xs$, 注意到 $ur \in R$, 因此 $u = 1 - (ur)xs$ 也有左逆 v, 于是 $vu = 1$, 故 $v = v1 = vu(1 + rxs) = 1 + rxs$, 故 $1 = u(1 + rxs) = (1 + rxs)u$, 因此 $1 + rxs$ 为单位, 故 $J(R) \subset W$.

综上所述, 命题成立.

(2) 注意到 W 的描述是左右对称的, 因此用与 $J(R)$ 同样的方法可以证明 $J'(R) = W$, 故 $J(R) = J'(R)$.

现在请读者回顾第 0 章第 3 节有关半单 (完全可约) 模与半单代数的相关性质.

定理 0.5.15 设 A 是域 K 上的半单代数, 则 A 的左理想满足两个链条件.

证要: 由定义 0.3.9, 左 A-模 A 完全可约, 于是 A 可以写成单子模 (也是极小左理想) 的直和 $A = \sum\limits_i L_i$, 设 $1 = \sum\limits_{j=1}^r e_j, e_j \in L_j$, 于是任意 $a \in A$ 有 $a = a1 = \sum\limits_{j=1}^r ae_j \in \sum\limits_{j=1}^r L_j$, 故 $A = \sum\limits_{j=1}^r L_j$, 即 A 实际上是有限个单模的直和, 于是易知有合成列

$$A = \sum_{j=1}^r L_j \supset \sum_{j=1}^{r-1} L_j \supset \cdots \supset L_n \supset 0.$$

故由定理 0.3.16, 左 A-模 A 满足两个链条件, 对应的即为 A 的左理想满足两个链条件.

定理 0.5.16 设 A 是域 K 上的代数, 则 A 是半单的当且仅当它 (作为环 A) 是左 Artin 环且 $J(A) = 0$.

证要: 必要性: 设 A 半单, 回顾定义 0.3.9, 知左 A-模 A 完全可约, 于是存在子模 (也是 A 的左理想) 使得 $A = J(A) \oplus I$, 于是据定理 0.3.7, 存在幂等元 $e \in J(A), f \in I$ 使得 $1 = e + f$, 由定理 0.5.6:$f = 1 - e$ 有左逆 u, 即 $uf = 1$, 故 $f = uff = uf = 1$(因 $ff = 1$), 故 $e = 1 - f = 0$, 仍由定理 0.3.7,$J(A) = J(A)e = 0$. 左 Artin 环由定理 0.5.15 即得.

充分性: 设 A 是左 Artin 环且 $J(A) = 0$, 左 Artin 环保证 A 有极小左理想 I, 现在 $I \neq 0 = J(A)$, 故 I 不在 $J(A)$ 中, 因此存在极大左理想 J 不包含 I, 但 $I \cap J \subset I$, 结合 I 的极小性知

$I \cap J = 0$, 再结合 J 的极大性 $A = I + J$, 故 $A = I \oplus J$.

再由 A 是左 Artin 环,J 包含极小左理想 I_2, 同理: 存在左理想 J_2 使得 $J = I_2 \oplus J_2$, 只要 J_2 不为 0, 便可再取 $I_3, J_3, \ldots$, 于是得到降链 $J = J_1 \supset J_2 \supset \ldots$, 但 A 是左 Artin 环, 于是这条链必终止, 只能是某个 $J_n = 0$, 于是 $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, 于是由定理 0.3.12 知 A 半单.

推论 0.5.17 设 A 是有限维代数, 则 A 半单当且仅当 $J(A) = 0$.

证要: 例 0.5.1(1) 告诉我们有限维代数一定是 Artin 环, 再利用定理 0.5.16 即可.

推论 0.5.18 设 A 是有限维代数, 则 A 半单当且仅当 $\bigcap\limits_{M\text{为单左}A\text{-模}} \operatorname{ann}(M) = 0$.

证要: 推论 0.5.17 结合定理 0.5.11.

定义 0.5.5 设 M 是环 R 上的左模, 若 $\operatorname{ann}(M) = 0$, 则称 M 是忠实的.

定理 0.5.19 设 A 是域 K 上的有限维代数, 如果 A 有一个忠实的不可约左模 M, 则 A 是单代数.

证要: 依题意 $\operatorname{ann}(M) = 0$. 于是 $\bigcap\limits_{M\text{为单左}A\text{-模}} \operatorname{ann}(M) = 0$, 推论 0.5.18 告诉我们 A 是半单的, 由定理 0.3.19, 设 $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$,$1 = e_1 + \cdots + e_s$, 其中 $e_1, e_2 \ldots, e_s$ 为 A 的两两不等的本原中心幂等元, 并且 $A_i = Ae_i$ 为单环 ,e_i 是 A 的单位元,$1 \le i \le s$. 于是

$$M = 1M = e_1M + \cdots + e_sM.$$

由于 e_i 在 A 的中心中, 故 $a(e_im) = (ae_i)m = (e_ia)m = e_i(am) \in e_iM$, 故 e_iM 为子模, 结合 $e_1, \ldots, e_s$ 两两正交知

$$M = 1M = e_1M \oplus \cdots \oplus e_sM.$$

但 M 是单模, 故 $M = e_kM$, 且对 $i \neq k, e_iM = 0$, 若 $s > 1$, 则 $e_i \in \operatorname{ann}(M)$, 矛盾! 于是 $s = 1, A$ 是单代数.

Chapter 1

基本概念

1.1 群的线性表示

定义 1.1.1 设 G 是一个群,V 是域 K 上的一个线性空间, 则 G 到 V 上全体可逆线性变换构成的群 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个群同态 φ 称为群 G 在域 K 上的一个线性表示, 简称为 K-表示或表示. 称 V 为表示空间, 若 V 为有限维, 则称 $\dim_K V$ 为表示的次数或维数, 记作 $\deg\varphi$.

设 e 为 G 的单位元,1_V 为 V 上的恒等变换, 显然, 定义 1.1.1 中的表示是一个二元组 (φ, V) 满足:

$$\begin{aligned}
&\varphi(g) \in \mathrm{GL}(V), \forall g \in G;\\
&\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h);\\
&\varphi(e) = 1_V.
\end{aligned}$$

定义 1.1.2 设 (φ, V) 是群 G 的一个线性表示.

若 $\ker\varphi = \{e\}$, 即 φ 是单射, 则称表示 φ 是忠实的;

若 $\ker\varphi = G$, 则称表示 φ 是平凡的;

群 G 上的一次平凡表示称为群 G 的主表示或单位表示, 记作 1_G.

注意到域 K 上 n 维线性空间 V 上全体可逆线性变换构成的群 $\mathrm{GL}(V)$ 与 K 上 $n \times n$ 可逆矩阵构成的群 $\mathrm{GL}_n(K)$ 是同构的, 因此, 取定一组基后, 便可将 G 的线性表示与矩阵表示对应起来.

定义 1.1.3 群 G 到 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个群同态 Φ 称为 G 在域 K 上的一个 n 次矩阵表示.

在 V 中取定一组基后, 我们将线性表示 φ(小写希腊字母) 对应的矩阵表示记作 Φ(对应的大写希腊字母). 此时, 称 Φ 是 φ 提供的.

定义 1.1.4 群 G 的两个表示 $(\varphi, V), (\psi, W)$ 称为是等价的 (或同构的), 如果存在一个线性同构 $\sigma : V \to W$ 使得

$$\psi(g)\sigma = \sigma\varphi(g)$$

对任意 $g \in G$ 成立. 即下图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varphi(g)"] & W \arrow[d, "\psi(g)"] \\ V \arrow[r, "\sigma"] & W \end{tikzcd}$$

交换.

此时记作 $\varphi \approx \psi$.

定理 1.1.1 上述定义中的二元关系 $\approx$ 是一个等价关系.

定义 1.1.5 群 G 的两个矩阵表示称为是等价的 (或同构的), 如果它们有相同的次数并且存在 K 上的一个可逆矩阵 S 使得

$$\Psi(g) = S^{-1}\Phi(g)S, \forall g \in G$$

成立.

定理 1.1.2 群 G 的两个有限维表示等价当且仅当它们提供的矩阵表示等价.

证要: 取一组基即可.

定理 1.1.3 设群 G 在非空集合 X 上有一个作用 $\circ$:$G \times X \to X$,

$$\begin{aligned} &(gh) \circ x = g \circ (h \circ x), \forall g, h \in G, \forall x \in X \\ &e \circ x = x, \forall x \in X. \end{aligned}$$

给定一个域 K, 将 K 看成 K 上的线性空间, 考虑 K 的一族复制 (copies) 构成的集合 $\{K_x\}_{x\in X}$, 记 $V = \sum\limits_{x\in X} K_x$ 为这一族线性空间的直和, 那么对任意 $g \in G$, 映射

$$\begin{aligned} &f_g : V \to V \\ &f_g(\{k_x\}_{x\in X}) = \{k_{g^{-1}\circ x}\}. \end{aligned}$$

是 V 上的一个可逆线性变换. 并且映射

$$\begin{aligned} &\varphi : G \to \mathrm{GL}(V) \\ &\varphi(g) = f_g \end{aligned}$$

是群 G 的一个 $K-$ 表示.

证要: 线性映射是显然的.f_g 的逆自然是 $f_{g^{-1}}$.

群同态由下式给出:

$$\begin{aligned} \varphi(g)\varphi(h)(\{k_x\}_{x\in X}) &= f_g f_h(\{k_x\}_{x\in X}) \\ &= f_g(\{k_{h^{-1}\circ x}\}_{x\in X}) \\ &= \{k_{h^{-1}\circ(g^{-1}\circ x)}\}_{x\in X} \\ &= \{k_{(gh)^{-1}\circ x}\} = f_{gh}(\{k_x\}_{x\in X}) \\ &= \varphi(gh)(\{k_x\}_{x\in X}). \end{aligned}$$

注 当 X 为有限集合 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 时,V 中所有元素可唯一地写成 $v=\sum\limits_{i=1}^n k_{x_i}x_i, k_{x_i}\in K$, 此时

$$\varphi(g)\left(\sum_{i=1}^n k_{x_i}x_i\right)=\sum_{i=1}^n k_{g^{-1}\circ x_i}x_i=\sum_{i=1}^n k_{x_i}(g\circ x_i).$$

与书上定义一致.

定义 1.1.6 (1) 设 G,X,V 同定理 1.1.3, 当 X 为 n 元集合时, 称该定理中构造的线性表示 φ 称为群 G 在域 K 上的一个 n 次置换表示.

(2) 设 G 是有限群, 群 G 在集合 G 上的左平移作用诱导的置换表示称为群 G 的正则 K-表示 (简称为正则表示), 通常记作 ρ, 其表示空间记为

$$K[G]=\left\{\sum_{g\in G}k_g g\middle|k_g\in K\right\}.$$

1.2 线性表示的结构

我们在处理线性空间和群的时候都会尝试将其分解为更"小"的"和", 在群的线性表示中也有类似的操作.

定义 1.2.1 (1) 设 (φ,V) 是群 G 的一个线性表示, 如果对任意 $g\in G$,V 的子空间 U 是线性变换 $\varphi(g)$ 的不变子空间, 就称 U 是表示 φ 的不变子空间或 G 不变子空间.

(2) 设 (φ,V) 是群 G 的一个线性表示,$U\neq 0$ 是 G 不变子空间, 那么由

$$\varphi_U(g):=\varphi(g)|U,\forall g\in G$$

所定义的线性表示 (φ_U,U) 称为表示 (φ,V) 的一个子表示.

注意到, 若 $\dim V=n\in\mathbb{N}^*,\dim U=m\in\mathbb{N}^*$, 那么存在 U 的一组基 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 以及这组基扩充成的 V 的基 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, 对这组基, 有相应的矩阵表示

$$\Phi(g)=\begin{pmatrix}\Phi_U(g) & C(g)\\ 0 & B(g)\end{pmatrix},\forall g\in G,$$

其中 Φ_U 恰为子表示 φ_U 提供的矩阵表示.

不难发现,0 与 V 均为 G 不变子空间, 称它们是平凡的 G 不变子空间. 同时不难证明,G 不变子空间的交与和仍然是 G 不变子空间.

定义 1.2.2 设 (φ,V) 是群 G 的一个线性表示,U 是 G 不变子空间, 如果存在 V 的一个 G 不变子空间 W 使得 $V=U\oplus W$, 那么称 W 是 U 在 V 中的一个 G 不变补空间.

定义 1.2.3 设群 G 有一族 $K-$ 表示 $(\varphi_i,V_i)(i\in I)$.

(1) 若有外直和 $V=\sum\limits_{i\in I}V_i$, 则映射

$$\varphi:G\to \mathrm{GL}(V),\varphi(g)(\{v_i\}_{i\in I})=\{\varphi_i(g)(v_i)\}_{i\in I},\forall g\in G$$

为群 G 的一个线性表示, 称其为表示 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 的外直和, 记作 $\varphi=\sum\limits_{i\in I}\varphi_i$. 当 $I=\{1,2,\ldots,n\}$ 时, 通常记作 $\varphi=\varphi_1\oplus\varphi_2\oplus\cdots\oplus\varphi_n$.

(2) 若 $\{V_i\}_{i\in I}$ 为 V 的一族子空间, 且有内直和 $V=\sum\limits_{i\in I}V_i$, 则映射

$$\varphi: G\to \mathrm{GL}(V), \varphi(g)\left(\sum_{i\in I}v_i\right)=\sum_{i\in I}\varphi(g)(v_i), \forall g\in G$$

为群 G 的一个线性表示, 称其为表示 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ 的内直和, 记作 $\varphi=\sum\limits_{i\in I}\varphi_i$. 当 $I=\{1,2,\ldots,n\}$ 时, 通常记作 $\varphi=\varphi_1\oplus\varphi_2\oplus\cdots\oplus\varphi_n$.

注: 我们对外直和与内直和采用相同的记号, 同时, 在以后的内容中我们通常只使用“直和”二字, 因为读者可根据上下文自行判断内外直和.

从上述定义不难看出, 对每个 $i\in I$,φ_i 可以看成 φ 的子表示, 并且 V_i 为 φ 的不变子空间.

下述定理可以说是给出了上述说明的一个逆命题, 它告诉我们可以通过将线性空间分解为不变子空间的直和来对表示进行分解.

定理 1.2.1 设 (φ, V) 是群 G 的一个 $K-$ 表示, 若有直和分解 $V=\sum\limits_{i\in I}V_i$, 且 $V_i(i\in I)$ 均为 φ 的不变子空间, 则有直和分解

$$\varphi=\sum_{i\in I}\varphi_i.$$

用定义即可, 留给读者自证.

定义 1.2.4 设 (φ, V) 是群 G 的一个 $K-$ 表示, 若 V 的 G 不变子空间只有 0 和 V(即没有非平凡的不变子空间), 那么称 (φ, V) 是不可约的, 否则称 (φ, V) 是可约的.

显然,1 次表示都是不可约的. 并且对于有限维表示,φ 可约当且仅当其提供的矩阵表示 Φ 具有形式

$$\Phi(g)=\begin{pmatrix}\Phi_U(g) & C(g)\\ 0 & B(g)\end{pmatrix}, \forall g\in G,$$

其中零矩阵的阶数大于 0 小于 $\dim V$, 且与 g 无关.

定义 1.2.5 设 (φ, V) 是群 G 的一个 $K-$ 表示, 如果对于 V 的每一个不变子空间, 都有它在 V 中的不变补空间, 那么称 (φ, V) 是完全可约的.

显然, 不可约表示是完全可约的.

接下来三个定理层层递进, 后两个定理对有限维来说很轻松 (只需使用反证法并不断取不变子空间即可导出矛盾), 但是无限维的情况需要引用 Zorn 引理.

定理 1.2.2 群 G 的完全可约表示的任意子表示都是完全可约的.

证要: 设 (φ, V) 是群 G 的一个 $K-$ 完全可约表示,φ_U 是其任意一子表示, 设 U_1 是 U 的一个 G 不变子空间, 则 U_1 也为 V 的 G 不变子空间, 则有子空间 $W\subset V$ 使得 $V=U_1\oplus W$, 令 $W_1=U\bigcap W$, 则 W_1 也为 U 的 G 不变子空间, 由线性代数知识得

$$U=U_1\oplus W_1.$$

上式说明 φ_U 是完全可约的.

定理 1.2.3 群 G 在域 K 上的完全可约表示 (φ, V) 一定有一个不可约子表示.

证要: 当 V 为有限维时, 取 φ_U 满足 U 为维数最小的非零不变子空间即可.

当 V 为无限维时, 首先,φ_U 是不可约子表示当且仅当对任意 V 的 G 不变子空间 W, 如果 $W \subset U$, 则必有 $W = 0$ 或 $W = U$. 因此 U 对于集合的包含关系为极小元, 那么其不变补空间就应该具有极大性, 我们基于此使用 Zorn 引理.

取 V 中非零元 α, 考虑表示 φ 的所有不包含 α 的不变子空间构成的集合 S,S 内集合的包含关系是一个偏序关系, 任取一条链 $\{T_i\}_{i\in I}$, 考虑集合 $T = \bigcup_{i\in I} T_i$, 显然 $T_i \subset T, \forall i \in I, T$ φ 的不变子空间 , 并且 $\alpha \notin T$, 这说明 $T \in S$ 且 T 为这条链的上界. 因此由 Zorn 引理,S 有极大元 U. φ 完全可约便知存在 G 不变子空间 U' 使得 $V = U \oplus U'$, 由定理 1.2.2 知 $\varphi_{U'}$ 完全可约, 若其可约, 则有直和分解 $U' = U_1' \oplus U_2'$, 且 U_1' 与 U_2' 均不等于 U 也不为零空间. 不难证明 $U = (U \oplus U_1') \bigcap (U \oplus U_2')$, 而 $\alpha \notin U$, 因此不妨设 $\alpha \notin U \oplus U_1'$, 但是 $U \subset U \oplus U_1'$ 且 $U \oplus U_1' \in S$, 与 U 的极大性矛盾. 故 $\varphi_{U'}$ 不可约, 命题成立.

注 一个似乎没有什么意义的问题是, 上述定理中的 “完全可约” 是否能去掉 (我不会).

定理 1.2.4 群 G 在域 K 上的完全可约表示 (φ, V) 一定是一族不可约子表示的直和. 特别地, 当 V 为有限维时, 它可以分解为有限个不可约子表示的直和.

证明: 有限维情况略.

一般情况下, 考虑由 φ 的不可约不变子空间组成的集合形成的族 S, 其中每个集合里的 G 不变子空间的和是直和. 任取 S 的一个链 $\{T_i\}_{i\in I}$, 记 $T = \Cup_{i\in I} T_i$, 任取 $X \neq Y \in T$, 由 $\{T_i\}_{i\in I}$ 为链知存在 $T_j, j \in I$ 使得 $X, Y \in T_j$, 故 $X \bigcap Y = 0$, 这意味着 $X \bigcap \left\langle \bigcup_{Y\in T, Y\neq X} Y \right\rangle = 0$, 因此 T 内的 G 不变子空间的和也是直和. 因此 $T \in S$,T 即为这条链的上界, 因此由 Zorn 引理知 S 有极大元 $\{U_i, i \in I'\}$, 令 $U = \sum_{i\in I'} U_i$, 则 U 也为 G 不变子空间. 由完全可约知有直和分解 $V = U \oplus U'$, 如果 $U' \neq 0$, 由定理 1.2.2 知 $\varphi_{U'}$ 完全可约, 再由定理 1.2.3 知其有一个不可约子表示 $\varphi_{U_1'}$, 注意到 $U_1' \bigcap U \subset U' \bigcap U = 0$, 因此 $U + U_1' = \left(\sum_{i\in I'} U_i\right) \oplus U_1'$. 这意味着 $\{U_i, i \in I'\} \bigcup \{U_1'\} \in S$, 与 $\{U_i, i \in I'\}$ 为极大元矛盾! 故 $U' = 0$, 因此 $V = \sum_{i\in I'} U_i$, 命题成立.

有了上述定理支撑, 我们便需要讨论群 G 的线性表示何时是完全可约的, 以及对群 G 的 (所有不等价的) 不可约表示的研究, 后者我们将放到下一章介绍.

定理 1.2.5(Maschke) 有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的任意线性表示都是完全可约的.

证明: 设 (φ, V) 为 G 的 $K-$ 表示, 若其不可约, 则其完全可约.

否则, 设 U 是非平凡的 G 不变子空间, 那么存在一个补空间 U' 使得 $V = U \oplus U'$. 接下来的目的是通过 U' 取构造 U 的不变补空间. 定义 $P_{U'}$ 为 V 到 U' 的平行于 U 的投影, 即 $P_{U'}(u + u') = u', u \in U, u' \in U'$. 令

$$B := |G|^{-1} \sum_{g\in G} \varphi(g) P_{U'} \varphi(g)^{-1}.$$

请读者自行验证 $B^2=B, U=\ker B, V=U\oplus \mathrm{Im}B$ 以及 $\mathrm{Im}B$ 即为所求的 G 不变子空间.

注 域 K 的特征整除 $|G|$ 的条件是必要的, 我们有如下反例:

模 p 的剩余类 Z_p 的加法群在 Z_p 上的如下 2 次矩阵表示不是完全可约的:

$$\begin{aligned} \Phi :& G\to \mathrm{GL}_2(Z_p) \\ &\bar{k}\mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, k=0,1,\ldots,p-1. \end{aligned}$$

1.3 Abel 群的不可约表示

这一节我们研究有限 Abel 群有限维不可约表示.

由于有限 Abel 群具有乘法交换性, 同时具有良好的结构 (可分解为循环子群的直积), 因此对其不可约表示的研究比一般的有限群更容易.

定理 1.3.1 设 Abel 群 G 的阶为 m, 域 K 含有本原 m 次单位根, 则 G 在域 K 上的有限维表示都是完全可约的.

证明: 设 (φ, V) 为 G 的一个有限维 $K-$ 表示. 任取 $g\in G$, 由于 $g^m=e$, 因此 $\varphi(g)^m=1_V$, 故 $\varphi(g)$ 的极小多项式整除 λ^m-1, 由于域 K 含 m 次单位根, 故 $\varphi(g)$ 的极小多项式在 K 内有根, 即 $\varphi(g)$ 有特征值 $\lambda_g\in K$. 由于 G 为 Abel 群, 于是对任意 $h\in G$ 有 $\varphi(g)\varphi(h)=\varphi(h)\varphi(g)$, 因此对每个 h, 特征子空间 V_{λ_g} 都是 $\varphi(h)$ 的不变子空间, 这说明 V_{λ_g} 是 G 不变子空间, 但 (φ, V) 不可约, 因此 $V_{\lambda_g}=V$, 故 $\varphi(g)=\lambda_g 1_V$ 是数乘变换, 这个式子对任意 $g\in G$ 成立, 因此 V 的任意一维子空间都是 G 不变子空间, 但 (φ, V) 不可约, 故只能是 $\dim V=1$.

推论 1.3.2 有限 Abel 群在代数闭域上的有限维不可约表示都是 1 次的.

这是因为代数闭域含有任意次本原单位根.

推论 1.3.3 有限 Abel 群的有限维不可约复表示都是 1 次的.

这是因为复数域是代数闭域.

由于有限 Abel 群可以表示为有限个循环群的直和, 因此我们首先研究循环群的不可约表示.

例 1.3.1 设域 K 含有本原 n 次单位根 ξ, 求 n 阶循环群 $G=<a>$, 在域 K 上的所有 1 次表示.

解: 设 φ 为一次 $K-$ 表示, 由于 $\varphi(a)^n=1_K$, 因此 $\varphi(a)$ 为 K 上 n 次单位根, 那么存在 $r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ 使得 $\varphi(a)=\xi^r$. 由此不难证明 $\varphi_r(a^j)=\xi^{rj}, r,j\in 0,1,\ldots,n-1$ 是 G 的所有 1 次 $K-$ 表示.

定理 1.3.4 设 Abel 群 G 的阶为 m, 域 K 含有本原 m 次单位根, 则 G 的所有 1 次 $K-$ 表示组成的集合 $\hat{G}$ 对于函数的乘法构成一个群, 并且

$$G\cong\hat{G}.$$

证要: 考虑 G 的分解 $G\cong\langle a_1\rangle\oplus\langle a_2\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_s\rangle$, 其中 $a_i\in G, |\langle a_i\rangle|=p_i^{n_i}, p_i^{n_i}|m, p_i$ 为素数,$i=1,2,\ldots,s$. 群 G 中每一个元素可以唯一地表示成 $g=a_1^{t_1}a_2^{t_2}\ldots a_s^{t_s}, 0\le t_j<p_j^{n_j}, j=1,2,\ldots,s$. 由于 K 含有本原 m 次单位根, 那么 K 含有本原 $p_i^{n_i}$ 次单位根 ξ_i.

不难证明,G 的每一个 1 次 $K-$ 表示 (即 $\hat{G}$ 中的每个元素) 与的数组 $(r_1, r_2, \dots, r_s)$(其中 $0 \leq r_i < p_i^{n_i} - 1, 1 \leq i \leq s$) 一一对应, 使得:

$$\varphi(g) = \varphi(a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_s^{t_s}) = \xi_1^{r_1 t_1} \xi_2^{r_2 t_2} \dots \xi_s^{r_s t_s}.$$

对 $h = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_s^{r_s} \in G$, 定义 $\varphi_h(a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_s^{t_s}) = \xi_1^{r_1 t_1} \xi_2^{r_2 t_2} \dots \xi_s^{r_s t_s}$, 此时, 映射

$$\begin{aligned} \sigma :& G \to \hat{G} \\ \sigma&(h) \mapsto \varphi_h \end{aligned}$$

即为所求的同构映射.

注 与上一个定理相同, 上述结论对代数闭域和复数域也成立.

1.4 非 Abel 群的不可约表示的一些构造方法

下述定理让我们能通过线性表示与群同态的合成来构造群的不可约表示.

定理 1.4.1 设 (φ, V) 为群 G 的一个 $K-$ 表示, 群 H 到群 G 有一个群同态 T, 则 φT 是 H 的一个 $K-$ 表示, 并且:

(1) 若 φT 不可约, 则 φ 不可约;

(2) 若 φ 不可约且 T 是满射, 则 φT 不可约.

证明留给读者.

注意到群 G 到其商群的自然同态是满同态, 因此我们有

定理 1.4.2 设 N 是群 G 的正规子群,π 为 G 到 G/N 的自然映射. 用 $\Omega_{G/N}$ 表示群 G/N 的所有 1 次 $K-$ 表示构成的集合,Ω_G 表示群 G 的所有核包含 N 的 $K-$ 表示构成的集合, 那么映射

$$\begin{aligned} \sigma :& \Omega_{G/N} \to \Omega_G \\ &\bar{\varphi} \mapsto \bar{\varphi}\pi \end{aligned}$$

是一个双射. 若记 $\varphi = \bar{\varphi}\pi$, 那么 φ 不可约当且仅当 $\bar{\varphi}$.

注 我们称 φ 为 $\bar{\varphi}$ 的提升,$\bar{\varphi}$ 为 φ 对于正规子群 N 的分解.

为了引用上一节的结论, 我们希望 G/N 成为 Abel 群, 很自然地想到取 N 为 G 的换位子群 (导群)G'.

推论 1.4.3 群 G 的所有 1 次 $K-$ 表示组成的集合与商群 G/G' 的所有 1 次 $K-$ 表示组成的集合之间存在着一个一一对应, 使得 G/N 的所有 1 次 $K-$ 表示经过提升便得到 G 的所有 1 次 $K-$ 表示

例 1.4.1 求 n 元对称群 S_n 的所有 1 次复表示.

解:S_n 的导群为 A_n, 而 S_n/A_n 为 2 阶循环群, 因此其恰有两个 1 次复表示: 主表示 $\bar{\varphi}_0$ 与表示 $\bar{\varphi}_1$, 其中 $\bar{\varphi}_1((12)A_n) = -1$.

由此知 A_n 的一次表示为主表示 φ_0 与表示 φ_1, 其中 $\varphi_1(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

群的自同构也是一个满同态, 因此可以通过其构造新的不可约表示.

定理 1.4.4 设 (φ, V) 为群 G 的一个 $K-$ 表示,σ 是群 G 的一个自同构, 则 $\varphi^\sigma := \varphi\sigma$ 是群 G 的一个 $K-$ 表示, 并且 φ^σ 不可约当且仅当 φ 不可约.

注 表示 φ^σ 称为 φ 通过自同构 σ 的挠表示.

例 1.4.2 (1) 取 $a \in G$, 则有内自同构 $\sigma_a(g) = aga^{-1}$, 那么

$$\varphi^{\sigma_a}(g) = \varphi\sigma_a(g) = \varphi(aga^{-1}) = \varphi(a)\varphi(g)\varphi(a)^{-1},$$

这说明二者等价.

(2) 设 N 为 G 的正规子群, 给定 $g \in G$, 令 $\tau_g(x) = gxg^{-1}, \forall x \in N$, 则其为 N 的自同构. 若设 (ψ, V) 为 N 的一个 $K-$ 表示, 那么 ψ^{τ_g} 为 N 的一个 $K-$ 表示, 称 ψ^{τ_g} 为 ψ 的共轭表示, 简记为 ψ^g.

令 $I(\psi) := \{g \in G | \psi^g \approx \psi\}$, 不难验证其为 G 的子群, 称其为 φ 在 G 中的惯性群. 显然,$N \subset I(\psi)$.

定理 1.4.5 设 (φ, V) 为群 G 的一个 n 次 $K-$ 表示,V^* 是 V 的对偶空间, 定义 $\varphi^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ 满足

$$\varphi^*(g)(f) = f\varphi(g^{-1}), \forall g \in G, f \in V^*.$$

那么 (φ^*, V^*) 也是群 G 的一个线性表示, 称为 (φ, V) 的逆步表示.

证要: 直接算就行.

例 1.4.3 (1) 在定理 1.4.5 中, 取 V 的一组基 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 以及 V^* 中相应的对偶基 $\{f_i\}_{i=1}^n$, 那么对于相应的矩阵表示有

$$\Phi^*(g) = \Phi(g^{-1})^T.$$

其中 A^T 表示取矩阵 A 的转置.

(2) 若令 $\varphi^{**} := (\varphi^*)^*$, 问: 表示 (φ, V) 是否与 (φ^{**}, V^{**}) 等价.

解:(2) 考虑矩阵表示, 由 (1) 知

$$\Phi^{**}(g) = \Phi^*(g^{-1})^T = (\Phi((g^{-1})^{-1})^T)^T = \Phi(g),$$

故二者等价.

例 1.4.4 设 (φ, V) 与 (ψ, W) 为群 G 的两个 $K-$ 表示, 证明:

$$(\varphi \oplus \psi)^* \approx \varphi^* \oplus \psi^*.$$

证要: 左边表示空间为 $(V \oplus W)^*$, 右边表示空间为 $V^* \oplus W^*$, 两个表示空间有自然的同构 $\sigma : V^* \oplus W^* \to (V \oplus W)^*, \sigma(f, g)(v, w) = (f(v), g(w))$, 容易验证 σ 就是我们需要的同构映射.

Chapter 2

有限群的不可约表示

2.1 群 G 的线性表示与群代数 $K[G]$ 上的左模

首先请大家回忆群 G 的正则表示 ρ 的表示空间 $K[G]$.

定理 2.1.1 已知 $K[G]$ 是域 K 上的线性空间, 在 $K[G]$ 中定义如下乘法运算

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) := \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}(a_g b_h)(gh) = \sum_{t\in G}\left(\sum_{g\in G} a_g b_{g^{-1}t}\right) t,$$

则:

(1)$K[G]$ 成为一个环, 成为群 G 在环 K 上的群环;

(2)$K[G]$ 成为域 K 上的代数, 称为群 G 在域 K 上的群代数.

注意, 这个定义也适合无限群.

定义 2.1.1 设 A 是域 K 上的一个代数,V 是域 K 上的一个线性空间,A 到 V 上所有线性变换组成的代数 $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ 的一个代数同态 T 称为代数 A 在域 K 上的线性表示,V 称为表示空间. 当 $\dim_K V$ 有限时, 称 V 的维数为表示 T 的次数 (或维数), 记作 $\deg T$.

定义 2.1.2 域 K 上代数 A 的两个 K-表示 $(T,V),(T',V')$ 称为是等价的, 如果存在一个线性同构 $\sigma: V\to V'$, 使得

$$T'(a)\sigma = \sigma T(a), \forall a\in A.$$

经典的倒装句 (doge). 另外我懒得画交换图了.

下一个定理给出了群 G 的线性表示与群代数 $K[G]$ 的线性表示的关系.

定理 2.1.2 (1) 设 (φ,V) 是群 G 的一个 K-表示, 考虑 $\varphi^*: K[G]\to \mathrm{Hom}_K(V,V)$ 满足

$$\varphi^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) := \sum_{g\in G} a_g\varphi(g),$$

则 (φ^*,V) 成为群代数 $K[G]$ 的一个 $K-$ 表示.

(2) 设 (φ^*, V) 是群代数 $K[G]$ 的一个线性表示, 定义 φ 为 φ^* 在子集 G 上的限制, 则 (φ, V) 成为 G 的一个线性表示.

(3)$\varphi \to \varphi^*$ 是群 G 的线性表示的集合与群代数 $K[G]$ 的线性表示的集合的双射.

证要:(1) 自己算. 注意到 G 中所有元素构成 $K[G]$ 的一组基, 因此 φ^* 是良定义的;

(2) 注意到 $\varphi^*(g)\varphi^*(g^{-1}) = \varphi^*(g^{-1})\varphi^*(g) = 1_V, \forall g \in G$, 故 $\varphi^*(g) \in \mathrm{GL}(V), \forall g \in G$. 故 φ 确实是 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的映射, 而同态是显然的;

(3) 由 (2) 不难证明该映射既单又满.

下述定理给出了群代数 $K[G]$ 的线性表示与 $K[G]$ 上左模的关系..

定理 2.1.3 (1) 设 (φ^*, V) 是群代数 $K[G]$ 的一个线性表示, 定义 $K[G]$ 对 V 的乘法为

$$av := \varphi^*(a)(v), \forall a \in K[G], v \in V,$$

该运算满足 $(a, b \in K[G], v, u \in V, k \in K, 1$ 为 $K[G]$ 的单位元):

$$\begin{aligned}
&a(v+u) = av + au;\\
&(a+b)v = av + bv;\\
&(ab)v = a(bv);\\
&1v = v.\\
&a(kv) = k(av) = (ka)v;
\end{aligned}$$

特别地,V 成为 $K[G]$ 上的一个左模.

(2) 设 V 是左 $K[G]$ 模, 定义运算 $K \times V \to V, kv := (k1)v, k \in K, v \in V$, 则 V 成为域 K 上的线性空间, 于是定义 $\varphi^* : K[G] \to \mathrm{Hom}_K(V, V)$ 满足

$$\varphi^*(a)(v) := av, a \in K[G], v \in V.$$

则 (φ^*, V) 是 $K[G]$ 的一个线性表示, 称它为左 $K[G]$-模 V 提供的表示. 将 φ^* 限制再 G 上便得到群 G 的线性表示, 称它为左 $K[G]$-模 V 提供的群 G 的表示.

上面两个定理确立了群的线性表示与群代数的左模的基本联系, 下一个定理将会进一步深入它们的联系.

定理 2.1.4 (1) 在定理 2.1.3 的意义下, 群 G 的正则表示 ρ 的表示空间就是 $K[G]$ 上的左正则模; 反之, 左正则 $K[G]$-模 $K[G]$ 提供的群 G 的表示就是群 G 的正则表示.

(2) 群 G 的线性表示 (φ, V) 的 G 不变子空间 U(相应地有子表示 φ_U) 对应左 $K[G]$-模 V 的子模 U; 反之, 左 $K[G]$-模 V 的子模 U 提供的表示就是 V 提供的表示的子表示 (相应地有 G 不变子空间 U).

(3) 若有表示 $(\varphi_i, V_i)_{i\in I}, (\varphi, V)$ 与外 (内) 直和分解 $\varphi = \sum\limits_{i\in I} \varphi_i$, 则有左 $K[G]$-模的外 (内) 直和分解 $V = \sum\limits_{i\in I} V_i$; 反之, 若有左 $K[G]$-模的外 (内) 直和分解 $V = \sum\limits_{i\in I} V_i$, 设 φ, φ_i 为 V, V_i 提供的表示, 则有表示 $(\varphi_i, V_i)_{i\in I}, (\varphi, V)$ 与外 (内) 直和分解 $\varphi = \sum\limits_{i\in I} \varphi_i$.

(4) 若表示 (φ, V) 不可约, 则左 $K[G]$-模 V 是单模; 反之, 若左 $K[G]$-模 V 不可约, 则它提供的表示不可约.

(5) 若表示 (φ, V) 完全可约, 则左 $K[G]$-模 V 是完全可约的; 反之, 若左 $K[G]$-模 V 是完全可约的, 则它提供的表示完全可约.

(6) 若表示 $(\varphi, V), (\psi, W)$ 等价, 则左 $K[G]$-模 V, W 同构; 反之, 若左 $K[G]$-模 V, W 同构, 则它们提供的表示等价.

证要:(1) 注意到定理 2.1.3(1) 中提供的运算 $K[G] \times K[G] \to K[G]$ 恰好就是 $K[G]$ 上的乘法运算;

(2) 注意到 $\left(\sum\limits_{g\in G} a_g g\right) u = \varphi^* \left(\sum\limits_{g\in G} a_g g\right)(u) = \sum\limits_{g\in G} a_g \varphi(g)(u)$ 以及 U 是线性子空间;

(3) 结合 (2) 考虑, 注意表示的直和对应线性空间的直和;

(4) 结合 (2) 考虑;

(5) 结合 (2) 与 (3);

(6) 自己算.

2.2 有限群不等价的不可约表示

上一小节的定理和第零章第 3 阶已经为我们做足了铺垫, 我们首先将它们对应起来:

定理 1.2.5 对应于:

定理 2.2.1(Maschke) 当域 K 的特征不能整除有限群 G 的阶时, 群代数 $K[G]$ 是半单的.

由定理 0.3.11, 定理 0.3.17, 定理 0.3.23 与定理 0.3.25 可以得到:

定理 2.2.2 若域 K 的特征不能整除有限群 G 的阶, 则

(1)G 的每一个不可约 K-表示 φ 都同构于 G 的正则表示 ρ 的直和分解式中的每一个不可约子表示, 从而有限群 G 的每一个不可约 K-表示都是有限维的;

(2) 称 (1) 中与 φ 等价的不可约子表示在 ρ 的直和分解中的重数与 ρ 的分解式无关, 称其为 φ 在 ρ 中的重数;

(3) 当 K 是代数闭域时,φ 在 ρ 中的重数等于 φ 的次数.

结合定理 0.3.19 知

定理 2.2.3 有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的所有不等价的不可约表示的个数等于群代数 $K[G]$ 的本原中心幂等元的个数.

进一步有

定理 2.2.4 (1) 有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的所有不等价的不可约表示的个数 s 不超过群 G 的共轭类的个数 r;

(2) 若 K 为代数闭域, 则 $s = r$, 并且 $K[G]$ 的全部本原中心幂等元构成子空间 $Z(K[G])$ 的一个基.

证要:(1) 由定理 2.2.3,$K[G]$ 恰有 s 个本原中心幂等元, 设为 $e_1, e_2, \ldots, e_s$. 由 $e_i \in Z(K[G])$ 及它们两两正交知线性无关, 故 $s \leq \dim_K Z(K[G])$.

接下来只需求 $Z(K[G])$ 的一组基. 设 $C_1,\dots,C_r$ 是 G 的全部共轭类, 令 $c_i=\sum\limits_{x\in C_i}x\in C_i,1\le i\le r$,(称 c_i 为 C_i 的类和), 不难证明 $c_i\in Z(K[G])$. 接下来证明 $c_1,\dots,c_r$ 构成线性空间 $Z(K[G])$ 的一组基即可, 便有 $s\le \dim_K Z(K[G])=r$.

(2) 符号同 (1), 对 $K[G]$ 有 $1=e_1+\cdots+e_s$, 令 $A_i=K[G]e_i$, 由定理 0.3.19 知 A_i 为单环且 $K[G]=A_1\oplus\cdots\oplus A_s$. 取 $L_i\subset A_i$ 为 $K[G]$ 的极小左理想, 则 L_i 也是 A_i 的极小左理想, 令 $D_i=\mathrm{Hom}_{A_i}(L_i,L_i),n_i=\dim_{D_i}L_i$, 利用 Wedderburn 定理 (定理 0.3.20) 与引理 0.3.24 便有 $A_i\cong M_{n_i}(D_i^{op})\cong M_{n_i}(K)$. 注意到 $Z(M_{n_i}(K))=KI_{n_i}\cong K$, 再结合定理 0.3.21 不难推出

$$\begin{aligned}Z(K[G])&=Z(A_1)\oplus Z(A_2)\oplus\cdots\oplus Z(A_s)\\&\cong Z(M_{n_1}(K))\oplus Z(M_{n_2}(K))\cdots\oplus Z(M_{n_s}(K))\\&\cong\underbrace{K\oplus K\oplus\cdots\oplus K}_{s\text{个}}\end{aligned}$$

于是 $\dim_K Z(K[G])=s$, 从而 $r=s$ 且 $e_1,\dots,e_s$ 为其一个基.

结合定理 0.3.25 便有

定理 2.2.5 设 $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_s$ 是有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的代数闭域 K 上的所有不等价的不可约表示, 则 $|G|=\sum\limits_{i=1}^{s}(\deg\varphi_i)^2$.

例 2.2.1 (1) 设 $(\varphi,V),(\psi,W)$ 是群 G 在域 K 上的两个不可约表示, 次数分别为 n,m, 若存在从 V 到 W 的线性映射 σ 使得 $\psi(g)\sigma=\sigma\varphi(g),\forall g\in G$, 则 $\sigma=0$ 或 $m=n$ 且 σ 可逆;

(2) 在 (1) 的条件下, 若 K 为代数闭域, 且 $V=W,\varphi=\psi$, 则存在 $k\in K$ 使得 $\sigma=k1_V$;

(3) 设 $(\varphi,V),(\psi,W)$ 是群 G 的两个不可约复表示,σ 是从 V 到 W 的线性映射, 令

$$\tilde\sigma=|G|^{-1}\sum_{g\in G}\psi(g)\sigma\varphi(g^{-1}),$$

(i) 若 φ 与 ψ 不等价, 则 $\tilde\sigma=0$;

(ii) 若 $V=W,\varphi=\psi$, 则 $\tilde\sigma=\dfrac{\mathrm{tr}(\sigma)}{\dim V}$.

证要:(1) 利用群表示与群代数的表示与群代数上左模的对应, 不难得出 $\psi^*(a)\sigma=\sigma\varphi^*(a),\forall a\in K[G]$, 进一步得出 $\sigma(av)=a\sigma(v),\forall a\in K[G],v\in V$. 于是 σ 成为左 $K[G]$ 模 V 与 W 的模同态, 但二者均为单模, 因此要么 $\ker\sigma=V$, 要么 $\ker\sigma=0$ 且 $\mathrm{Im}\sigma=W$, 即 $\sigma=0$ 或 $m=n$ 且 σ 可逆.

(2) 同样利用对应,$\sigma\in\mathrm{Hom}_{K[G]}(V,V)$, 故由引理 0.3.24 知 $D=k1_V$.

(3)(i) 只需证明 $\psi(g)\tilde\sigma=\tilde\sigma\varphi(g),\forall g\in G$, 然后引用 (1) 即可;

(ii) 由 (2) 知存在 $k\in\mathbb{C}$ 使得 $k1_V=\tilde\sigma=|G|^{-1}\sum\limits_{g\in G}\varphi(g)\sigma\varphi(g^{-1})$, 两边取迹 tr 解出 k 即可.

例 2.2.2 设 G 是有限群, 代数闭域 K 的特征不能整除 $|G|$, 证明: 如果 G 有一个 Abel 子群 H, 则 G 的每个不可约 K-表示的次数不超过 $[G:H]$.

证要:φ 在 H 上的限制 $\varphi|_H$ 是 H 的线性表示, 且它完全可约, 则它有一个不可约的子表示, 而 H 是 Abel 群, 故这个不可约子表示是 1 次的, 设 W 是其表示空间, 并设 $W=\langle w\rangle$. 设 H 在

G 中的一个左陪集代表系为 $\{g_1, \ldots, g_r\}$, 其中 $r = [G : H]$, 则任意 $g \in G$, 存在 g_i 与 $h \in H$ 使得 $g = g_i h$. 考虑子空间 $V' = \langle \varphi(g_1)(w), \ldots, \varphi(g_r)(w) \rangle$, 由 $\varphi(g)(\varphi(g_j)(w)) = \varphi(gg_j)(w) = \varphi(g_i h)(w) = \varphi(g_i)\varphi(h)(2) = \varphi(g_i)(kw) = k\varphi(g_i)(w) \in V'$. 故 V' 是 G 不变子空间, 但 V 不可约, 故 $V = V'$, 这说明 $\dim_K V \leq r = [G : H]$.

Chapter 3

群的特征标

3.1 特征标的定义和基本性质

定义 3.1.1 (1) 设 (φ, V) 是群 G 在域 K 上的一个线性表示, 定义函数

$$\chi_\varphi : G \to K, \chi_\varphi(g) := \mathrm{tr}(\varphi(g)), \forall g \in G.$$

称 χ_φ 是 G 的表示 φ 提供的特征标, 在不引起混淆的情况下简记为 χ;

(2) 设 χ 是群 G 的 K-表示 χ_φ 提供的特征标,φ 提供的群代数 $K[G]$ 的表示记作 φ^*, 称函数

$$\chi^* : K[G] \to K, \chi^*(a) := \mathrm{tr}(\varphi^*(a))$$

为 $K[G]$ 的线性表示提供的特征标 (或左 $K[G]$-模 V 提供的特征标).

定理 3.1.1 在定义 3.1.1 中, 有 χ^* 在 G 上的限制等于 χ, 同时 $\chi^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g \chi(g)$.

定义 3.1.2 群 G 上的 K-值函数 f 如果对于任给 $a \in G$, 有

$$f(gag^{-1}) = f(a), \forall g \in G,$$

则称 f 是 G 上的一个类函数.

定义 3.1.3 (1) 给定群 G 与域 K, 群 G 上的全体 K-函数构成的集合关于加法 $(f+g)(a) := f(a)+g(a)$, 乘法 $(fg)(a) := f(a)g(a)$, 数乘 $(kf)(a) := kf(a)$ 构成一个 K-代数, 通常我们考虑它作为线性空间的结构, 称为 G 上的 K-值函数构成的函数空间, 记作 K^G;

(2) 群 G 的全体 K-值类函数构成 K^G 的一个子代数, 称作 G 上的 K-值类函数空间 (作为线性空间) 或 G 的类函数环 (作为环), 记作 $Cf_K(G)$.(奇怪的符号)

我们将特征标的基本性质总结在下述定理中, 验证它们都不是困难的.

定理 3.1.2 (1) 设 φ 是群 G 的 K-表示, 则 $\chi_\varphi(1) = (\deg\varphi)1_K$, 特别地,$K = \mathbb{C}$ 时 $\chi_\varphi(1) = \deg\varphi$;

(2)χ 是群 G 上的一个类函数;

(3) 设 $(\varphi, V), (\psi, W)$ 是群 G 的两个 K-表示, 如果 $\varphi \approx \psi$, 那么 $\chi_\varphi = \chi_\psi$;

(4) 设 G 是群, 如果左 $K[G]$-模 V 与 W 模同构, 则它们提供的特征标相等;

(5) 设 $(\varphi_i, V_i), 1 \leq i \leq n$ 是群 G 的一列 K-表示, 若 $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i$ 则 $\chi_\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{\varphi_i}$;

(6) 设 G 是群, 如果 $M_i, 1 \leq i \leq n$ 均为左 $K[G]$-模, 且 $M = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i$, 则 M 提供的特征标是 $M_i, 1 \leq i \leq n$ 提供的特征标之和;

(7) 设有限群 G 的指数 (即 G 中所有元素的阶的最小公倍数) 为 m,G 的任一复表示提供的特征标为 χ, 则 $\forall g \in G, \chi(g)$ 都是 G 的一些 m 次单位根的和;

(8) 设 χ 是有限群 G 的复表示 (φ, V) 提供的特征标, 则 $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}, \forall g \in G$;

(9) 设有限群 G 的指数为 m,χ 是群 G 的 n 次复表示 (φ, V) 提供的特征标, 则对任意 $g \in G$, 有 $|\chi(g)| \leq \chi(1)$, 且等号成立当且仅当 $\varphi(g) = c\varphi(1)$, 其中 c 是 m 次单位根;

(10) 设 χ 是有限群 G 的复表示 (φ, V) 提供的特征标, 则 $\chi(g) = \chi(1)$ 当且仅当 $\varphi(g) = 1_V$.

证要: 看书即可.

3.2 不可约特征标的正交关系

本节几乎所有内容都是计算问题.

引理 3.2.1 设 G 是有限群, 域 K 的特征不能整除 $|G|$,$e_1, e2, \ldots, e_s$ 是 $K[G]$ 的全部本原中心幂等元,$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ 是 G 的全部不等价的不可约 K-表示,φ_i 提供的特征标为 χ_i,φ_i 在 G 的正则表示 ρ 到不可约子表示提供的直和分解式中的重数为 $n_i, i = 1, 2, \ldots, s$,ρ 提供的特征标为 χ.χ_i, χ 提供的群代数 $K[G]$ 的特征标记为 $\chi_i^*, \chi^*, 1 \leq i \leq s$, 则

$$\begin{aligned}
&\chi_j^*(ge_i) = \delta_{ij}\chi_i(g), \forall g \in G, \\
&e_i = \frac{n_i}{\chi(1)} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g.
\end{aligned}$$

当 $K = \mathbb{C}$ 时,

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}g.$$

证要: 注意到 G 是线性空间 $K[G]$ 的基, 因此设 $e_i = \sum\limits_{h \in G} a_h h$, 为解出 a_h, 需要 $|G|$ 个方程, 因此考虑 $ge_i = \sum\limits_{h \in G} a_{g^{-1}h} h$, 注意到 χ 是群 G 的正则表示 ρ 提供的特征标, 因此当 $g \neq 1$ 时 $\chi(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)) = 0$. 有

$$\chi^*(ge_i) = \sum_{h \in G} a_{g^{-1}h}\chi(h) = a_{h^{-1}}\chi(1),$$

于是 $a_h = \dfrac{\chi^*(h^{-1}e_i)}{\chi(1)}$.

请读者回顾定理 0.3.19, 定理 0.3.23 及其符号及其证明,φ_j^* 的表示空间是 L_{j1}, 注意到 $i \neq j$ 时 $L_{j1}L_{i1} = 0$, 此时 $\varphi_j^*(ge_i)x = g(e_i x) = 0, \forall x \in L_{j1}$, 因此 $\chi^*(ge_i) = \mathrm{tr}(\varphi_j^*(ge_i)) = 0$. 而 $\varphi_i^*(ge_i)y = g(e_i y) = gy = \varphi_i(g)y, \forall y \in L_{i1}$, 因此 $\chi_i^*(ge_i) = \chi_i(g)$. 这证明了第一个等式.

接下来, 由于 $\rho=\sum_{j=1}^{s}n_j\varphi_j$, 因此 $\chi^*(ge_i)=\sum_{j=1}^{s}n_j\chi_j^*(ge_i)=n_i\chi_i(g)$, 带入第一段最后一式便有 $a_h=\dfrac{n_i\chi_i(h^{-1})}{\chi(1)}$, 由此不难得出第二个等式.

当 $K=\mathbb{C}$ 时,$\chi(1)=\deg\rho=|G|$, 且 $n_i=\dim_K L_{i1}=\deg\varphi_i=\chi_i(1)$,$\chi_i(g^{-1})=\overline{\chi_i(g)}$, 由此得到最后一个等式.

定理 3.2.2 设 K 是特征为 0 的域, 则有限群 G 的两个 K-表示 φ 与 ψ 等价当且仅当 $\chi_\varphi=\chi_\psi$.

证要: 必要性即定理 3.1.2(3)

充分性: 若 $\varphi\approx\sum_{i=1}^{s}a_i\varphi_i,\psi\approx\sum_{i=1}^{s}b_i\varphi_i$, 那么 $\chi_\varphi=\sum_{i=1}^{s}a_i\chi_i$, 于是 $\chi_\varphi^*=\sum_{i=1}^{s}a_i\chi_i^*$, 结合引理 3.2.1 及其证明有 $\chi_\varphi^*(e_j)=\sum_{i=1}^{s}a_i\chi_i^*(e_j)=a_j\chi_i(1)$, 因此 $a_j=\chi_\varphi^*(e_i)\chi_j(1)^{-1}$, 同理 $b_j=\chi_\psi^*(e_j)\chi_i(1)^{-1}$, 由 $\chi_\varphi=\chi_\psi$ 知 $\chi_\varphi^*=\chi_\psi^*$, 故 $a_j=b_j$, 故 $\varphi\approx\psi$.

定义 3.2.1 设 $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_s$ 是群 G 的所有不可约复特征标,$C_1,C_2,\dots,C_s$ 是群 G 的所有共轭类 (定理 2.2.4 告诉我们二者相等), 矩阵

$$W=\begin{pmatrix}\chi_1(g_1) & \chi_1(g_2) & \dots & \chi_1(g_s)\\ \chi_2(g_1) & \chi_2(g_2) & \dots & \chi_2(g_s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \chi_s(g_1) & \chi_s(g_2) & \dots & \chi_s(g_s)\end{pmatrix}$$

称为 G 的复特征标表. 通常约定 χ_1 为 G 的主表示提供的特征标且 g_1 为 G 的单位元.

定理 3.2.3 (1)(**第一正交关系**) 设 $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_s$ 为有限群 G 的全部不等价的不可约复表示,φ_i 提供的特征标记为 $\chi_i,1\le i\le s$, 则

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)}=\delta_{ij}.$$

设 $C_1,C_2,\dots,C_s$ 为群 G 的全部共轭类, 若 $g_i\in C_i,1\le i\le s$, 那么

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s}|C_k|\chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)}=\delta_{ij}.$$

若对 $f,g\in\mathbb{C}^G$ 定义内积 $(f,g):=\dfrac{1}{|G|}\sum_{h\in G}f(h)\overline{g(h)}$, 那么 $(\chi_i,\chi_j)=\delta_{ij}$.

(2)(**第二正交关系**)$\dfrac{1}{|G|}\sum_{k=1}|C_k|\chi_k(g_j)\overline{\chi_k(g_i)}=\delta_{ij}$.

证要:(1) 利用引理 3.2.1 并注意到特征标是群 G 的类函数.

(2) 利用复特征标表, 将第一正交关系表示为矩阵形式.

推论 3.2.4 设 $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_s$ 为有限群 G 的全部不等价的不可约复表示,φ_i 提供的特征标记为 $\chi_i,1\le i\le s$, 则对于 G 的任一复表示 φ, 不可约表示 φ_i 在 φ 中的重数 (即 φ 到不可约子表示的直和分解式中与 φ 等价的不可约子表示个数) 等于 (χ_φ,χ_i).

证要: 设 $\varphi = \sum_{i=1}^{s} a_i\varphi_i$, 则有 $\chi_\varphi = \sum_{i=1}^{s} a_i\chi_i$ 两边与 φ_i 作内积并利用第一正交关系便有 $a_i = (\chi_\varphi, \chi_i)$.

推论 3.2.5 有限群 G 的有限维复表示不可约当且仅当 $(\chi_\varphi, \chi_\varphi) = 1$.

证要: 必要性由第一正交关系给出.

充分性: 设 $\varphi = \sum_{i=1}^{s} a_i\varphi_i$, 由 $(\chi_\varphi, \chi_\varphi) = 1$ 及第一正交关系知 $\sum_{i=1}^{s} |a_i|^2 = 1$, 但 a_i 均为非负整数, 因此有且仅有一个 i 使 $a_i = 0$, 此时 $\varphi = \varphi_i$ 不可约.

定理 3.2.6(反演公式) 有限群 G 的单位元记作 1, 若 $a = \sum_{g\in G} a_g g$, 则

$$a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \chi(ag^{-1})\chi(1), \forall g \in G.$$

其中 $\mathrm{Irr}(G)$ 表示 G 的所有不等价的不可约表示构成的集合.

证要: 类似引理 3.2.1 的证明, 设 ρ 是正则表示, 由 $a = \sum_{g\in G} a_g g$ 知 $\chi_\rho^*(ag^{-1}) = \sum_{h\in G} a_{hg}\chi_\rho(h) = a_g\chi_\rho(1) = |G|a_g$. 注意到 $\chi_\rho^* = \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi$, 于是结论显然.

定义 3.2.2 设群 G 在集合 X 上有一个群作用.

(1) 若 $\forall x, y \in G, \exists g \in G$ 使得 $y = gx$, 则称该作用是传递的;

(2) 若 $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G \times G, \exists g \in G$ 使得 $y_1 = gx_1, y_2 = gx_2$, 则称这个作用是双传递的.

引理 3.2.7 设群 G 在 X 上有一个双传递的作用.

(1) 这个作用是传递的;

(2) 对 $x \in X$, 稳定子群 $G_x := \{g \in G|gx = x\}$ 在 $X - \{x\}$ 上的作用是传递的, 因此 G_x 在 X 上的作用将 X 划分为了两条轨道 $\{x\}$ 与 $X - \{x\}$.

证要:(1) 显然.

(2) 若 $y \in X - \{x\}, h \in G_x$, 则 $hy \in X - \{x\}$, 因此该作用是合理的. 任取 $y, z \in X - \{x\}$, 对 $(x, y), (x, z)$ 由双传递性知存在 $g \in G$ 使得 $x = gx, z = gy$, 故 $g \in G_x$, 因此 G_x 在 $X - \{x\}$ 上的作用传递.

引理 3.2.8(Burnside) 设有限群 G 在有限集合 X 上有一个作用, 定义 $F(g) := \{x \in X|gx = x\}$ 为 g 的不动点集, 那么 G 在 X 上这个作用的轨道条数为

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |F(g)|.$$

证要: 考虑集合 $S := \{(g, x) \in G \times X|gx = x\}$, 若记 O_x 为 x 的轨道, 则有

$$\sum_{g\in G} |F(g)| = |S| = \sum_{x\in X} |G_x| = |G| \sum_{x\in X} \frac{1}{|O_x|}.$$

设 $O_1, \ldots, O_r$ 是该作用的全部轨道, 则

$$\sum_{x\in X} \frac{1}{|O_x|} = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{x\in O_i} \frac{1}{|O_i|} \right) = \sum_{i=1}^{r} 1 = r.$$

综合这两式得证.

引理 3.2.9 设有限群 G 在 n 元集合 X 上有一个作用, 由此作用得到的在域 K 上的置换表示记作 φ, 则

$$\chi_\varphi(g) = |F(g)|1_K.$$

证要: 注意到

$$\varphi(g)(x_i) = \begin{cases} 0, x \in F(g) \\ 1_K, x \notin F(g) \end{cases}$$

即可.

推论 3.2.10 设有限群 G 在集合 X 上有一个作用, 由此得到的在复数域上的置换表示记作 φ, 那么该作用的轨道条数为 (χ_0, χ_φ), 其中 χ_0 是群 G 的主表示, 从而 r 等于 G 的主表示 φ_0 在 φ 中的重数.

证要:$r = \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}|F(g)| = \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi_\varphi(g) = \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi_\varphi\overline{\chi_0(g)} = (\chi_\varphi, \chi_0)$.

定理 3.2.11 若有限群 G 双传递地作用在集合 X 上, 则

$$\sum_{g\in G}|F(g)|^2 = 2|G|.$$

证要: 由引理 3.2.7,G_x 在 $X - \{x\}$ 上的作用是传递的, 若令 $F_1(g) := \{y \in X - \{x\} | gy = y\}$, 于是由引理 3.2.8 $\sum\limits_{g\in G_x}|F_1(g)| = |G_x| = \dfrac{|G|}{|X|}$. 注意到对 $g \in G_x$ 有 $|F(g)| = |F(g)| + 1$, 于是 $\sum\limits_{g\in G_x}|F(g)| = 2\dfrac{|G|}{|X|}$, 于是 $\sum\limits_{x\in X}\sum\limits_{g\in G_x}|F(g)| = 2|G|$. 最后注意到若 $h \in \cup_{x\in X}G_x$, 则 $|F(h)| = 0$, 而若 $h \in G_x$, 则 h 有 $|F(h)|$ 个不动点, 从而 h 属于 $|F(h)|$ 个不动子群, 于是 $2|G| = \sum\limits_{x\in X}\sum\limits_{g\in G_x}|F(g)| = \sum\limits_{g\in G}|F(g)|^2$.

定理 3.2.12 如果有限群 G 在复数域上有一个 n 次双传递置换表示 φ, 那么 φ 等价于 G 的主表示 φ_0 与 G 的一个 $n-1$ 次不可约表示 ψ 的直和, 并且

$$\chi_\varphi(g) = |F(g)| - 1, \forall g \in G.$$

证要: 设 φ 是由 G 在 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的双传递作用得到的, 考虑将表示空间 $V = \left\{\sum\limits_{i=1}^n k_i x_i \middle| k_i \in K, 1 \le i \le n\right\}$ 分解为 $U = \left\langle \sum\limits_{i=1}^n x_i \right\rangle$ 与 $W = \left\{\sum\limits_{i=1}^n k_i x_i \middle| \sum\limits_{i=1}^n k_i = 0\right\}$ 的直和.

推论 3.2.13 当 $n \ge 4$ 时, 交错群 A_n 有一个 $n-1$ 次不可约复表示 ψ, 并且

$$\chi_\psi(g) = |F(g)| - 1, \forall g \in A_n.$$

3.3 有限 Abel 群上的 Fourier 变换

本节可以看成复特征标的一个小应用.

定义 3.3.1 设 G 是 n 阶 Abel 群,G 上全体复值函数在如下运算:

(1) 加法:$(f+g)(a) := f(a)+g(a)$;

(2) 乘法:$(fg)(a) := f(a)g(a)$;

(3) 数乘:$(kf)(a) := kf(a), k \in \mathbb{C}$

下构成域 $\mathbb{C}$ 上的代数. 特别地, 这是一个向量空间, 称为 G 上的复值函数空间, 记作 $\mathbb{C}^G$.

在 $\mathbb{C}^G$ 上定义

$$(f,g) := \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} f(a)\overline{g(a)},$$

容易验证这是一个内积, 于是 $\mathbb{C}^G$ 成为了一个酉空间.

定理 3.3.1 设 G 是 n 阶 Abel 群, 则 G 的全部不可约复特征标 $\chi_1,\dots,\chi_n$(请读者回顾定理 1.3.4) 构成酉空间 $\mathbb{C}^G$ 的一组标准正交基. 从而 G 上任意复值函数 f 可以表示成

$$f = \sum_{i=1}^{n}(f,\chi_i)\chi_i.$$

上式称为 f 的 Fourier 展开,$(f,\chi_i), 1\le i\le n$ 称为 f 的 Fourier 系数.

证要: 标准正交由不可约特征标的正交关系得出. 在注意到 $\mathbb{C}^G$ 的维数恰好就是 $|G|=n$ 即可.

请读者回顾定理 1.3.4 的记号, 我们将元素 g 在定理 1.3.4 中的同构的像对应的特征标记为 χ_g.

定义 3.3.2 设 G 是 n 阶 Abel 群,$f\in\mathbb{C}^G$, 对 $\forall g\in G$, 令

$$\hat{f}(g) := \sqrt{|G|}(f,\chi_g) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{a\in G} f(a)\overline{\chi_g(a)}.$$

上式给出了 $\mathbb{C}^G$ 到自身的一个映射

$$\begin{aligned}\tau :&\mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^G\\ &f\mapsto \hat{f},\end{aligned}$$

称 τ 是基于有限 Abel 群 G 的 Fourier 变换.

定理 3.3.2 上述定义中的 τ 是一个酉变换, 即

(1)$\widehat{kf+lg} = k\hat{f}+l\hat{g}, k,l\in\mathbb{C}$;

(2)$(\hat{f},\hat{g}) = (f,g)$.

(2) 中的等式被称为 Parseval 等式.

证要:(1) 是显然的.

(2):

$$
\begin{aligned}
(\hat{f},\hat{g}) &= \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\hat{f}(a)\overline{\hat{g}(a)} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\left[\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{x\in G}f(x)\overline{\chi_a(x)}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{y\in G}\overline{g(y)}\chi_a(y)\right] \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{x,y\in G}f(x)\overline{g(y)}\left[\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\chi_a(y)\overline{\chi_a(x)}\right] \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}f(x)\overline{g(x)} \\
&= (f,g).
\end{aligned}
$$

倒数第二、三行用了第二正交关系, 注意到 Abel 群的每个共轭类只含 1 个元素.

定理 3.3.3 我们有 Fourier 反演公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{a\in G}\hat{f}(a)\chi_a(x).$$

证要: 由定理 3.3.1 与定义 3.3.2 知

$$f(x) == \sum_{i=1}^{n}(f,\chi_i)\chi_i(x) = \sum_{a\in G}(f,\chi_a)\chi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{a\in G}\hat{f}(a)\chi_a(x).$$

定义 3.3.3 我们定义卷积:

$$(f*g)(a) := \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{b\in G}f(b)g(ab^{-1}).$$

定理 3.3.4

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}.$$

证要: 注意到 Abel 群的不可约复表示都是 1 次的, 于是对不可约特征标 χ 有 $\chi(ac)$ =

$\mathrm{tr}(\varphi(ac)) = \varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(c) = \mathrm{tr}(\varphi(a))\mathrm{tr}(\varphi(c)) = \chi(a)\chi(c)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(x) &= \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{a\in G}(f*g)(a)\overline{\chi_x(a)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{a\in G}\left[\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{b\in G}f(b)g(ab^{-1})\right]\overline{\chi_x(a)}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{b\in G}\sum_{c\in G}f(b)g(c)\overline{\chi_x(bc)}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{b\in G}\sum_{c\in G}f(b)g(c)\overline{\chi_x(b)\chi_x(c)}\\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{b\in G}f(b)\overline{\chi_x(b)}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{c\in G}g(c)\overline{\chi_x(c)}\right]\\
&= \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}$$

其中第三行作了代换 $c = ab^{-1}$.

3.4 不可约复表示次数满足的条件

首先做一点铺垫.

定义 3.4.1 复数 α 如果是一个 $\mathbb{Z}[x]$ 内的首一多项式的根, 则称其为代数整数.

为做区分, 我们将整数称为有理整数.

定理 3.4.1 对于 $\alpha \in \mathbb{C}$, 如下三个条件等价:

(1)α 为代数整数;

(2) 环 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-模;

(3)α 是某个有限生成的非零 $\mathbb{Z}$-模 M 中的元素;

证要:(1)$\Rightarrow$(2): 设 α 是代数整数, 设它是 n 次首一多项式 $f(x)$ 的根, 对任意 $\beta \in \mathbb{Z}[\alpha]$, 都存在整系数多项式 $g(x)$ 使得 $\beta = g(\alpha)$, 由于 $f(x)$ 是首一的多项式, 故存在整系数多项式 $p(x), r(x)$ 使得 $g(x) = f(x)p(x) + r(x)$, 其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg f(x) = n$, 此时 $\beta = g(\alpha) = f(\alpha)p(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha) \in (1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$, 于是 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 由 $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ 生成.

(2)$\Rightarrow$(3): 取 $M = \mathbb{Z}[\alpha]$ 即可;

(3)$\Rightarrow$(1): 现在有子模 $\mathbb{Z}[\alpha]$, 由于 $\mathbb{Z}$ 是主理想整环, 故有限生成模 M 的子模 $\mathbb{Z}$ 也是有限生成的, 设其生成元为 $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$, 取 $m > \max\limits_{1\le i\le n}\{\deg f_i\}$, 则存在 $b_i \in \mathbb{Z}$ 使得 $\alpha^m = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i f_i(\alpha)$, 移项便得到所需要的首一多项式.

定理 3.4.2 所有代数整数构成 $\mathbb{C}$ 的子环.

证要: 设 α, β 是代数整数, 则 $\mathbb{Z}[\alpha], \mathbb{Z}[\beta]$ 都是有限生成的, 不难证明 $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ 有限生成, 利用定理 3.4.1 知 $\alpha - \beta$ 与 $\alpha\beta$ 是代数整数.

定理 3.4.3 如果 α 既是代数整数, 又是有理数, 那么它是有理整数.

证要: 设 $\alpha = \dfrac{p}{q}$ 是整系数首一多项式 $f(x)$ 的根, 则 q 整除 $f(x)$ 的首项系数 1, 故 $q=1$, 即 α 为整数.

接下来回到表示论.

定理 3.4.4 设 G 是有限群, 对 $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$, 令

$$\omega_i(a) := \frac{\chi_i(a)}{\chi_i(1)}, \forall a \in \mathbb{C}[G],$$

则

$$a = \sum_{j=1}^{s} \omega_j(a) e_j, \forall a \in \mathbb{Z}(C[G]),$$

其中 $e_1, e_2, \ldots, e_s$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 的全部两两不等的本原中心幂等元, 并且

$$\omega_i(a)\omega_i(b) = \omega_i(ab), \forall a \in \mathbb{Z}(C[G]), b \in \mathbb{C}[G].$$

证要: 设 $a = \sum_{j=1}^{s} a_j e_j$, 于是 $\omega_i(a) = \sum_{j=1}^{s} a_j \dfrac{\chi_i(e_j)}{\chi_i(1)} = a_j$, 得到第一个等式.

注意到 $\omega_i(ab) = \omega_i(ba) = \sum_{j=1}^{s} a_j \dfrac{\chi_i(be_j)}{\chi_i(1)} = a_i \dfrac{\chi_i(b)}{\chi_i(1)} = \omega_i(a)\omega_i(b)$.

定理 3.4.5 设 G 是有限群, 对 $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$, 令

$$\omega_i(a) := \frac{\chi_i(a)}{\chi_i(1)}, \forall a \in \mathbb{C}[G],$$

则对于 G 的任一共轭类 C_l 的类和 $c_l, \omega_i(c_l)$ 是一个代数整数.

证要: 由定理 3.4.4 知 $\omega_i(c_l c_k) = \omega_i(c_l)\omega_i(c_k)$. 注意到 $c_1, \ldots, c_s$ 是 $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$ 的一组基, 故

$$c_l c_k = \sum_{j=1}^{s} m_{lkj} c_j.$$

将两边展开为 $\mathbb{C}[G]$ 中以 G 为基的线性组合就知道 m_{lkj} 都是整数. 上面两式结合再注意到 ω_i 显然是一个线性映射便有

$$\omega_i(c_l)\omega_i(c_k) = \sum_{j=1}^{s} m_{lkj} \omega_i(c_j).$$

固定 l 得到

$$\omega_i(c_l) \begin{pmatrix} \omega_i(c_1) \\ \omega_i(c_2) \\ \cdots \\ \omega_i(c_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{l11} & m_{l12} & \ldots & m_{l1s} \\ m_{l21} & m_{l22} & \ldots & m_{l2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ m_{ls1} & m_{ls2} & \ldots & m_{lss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_i(c_1) \\ \omega_i(c_2) \\ \cdots \\ \omega_i(c_s) \end{pmatrix}$$

记右边的方阵为 M, 则这是一个整系数方阵.

现在假设 $\omega_i(c_1)=\cdots=\omega_i(c_s)=0$, 注意到 $1\in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[G])$, 故设 $1=\sum\limits_{j=1}^{s}a_jc_j$, 此时

$$1=\omega_i(1)=\sum_{j=1}^{s}a_j\omega_i(c_j)=0,$$

矛盾! 故一定有某个 ω_i 不为 0, 这说明 $\omega_i(c_l)$ 是整数矩阵 M 的特征值, 而相应的特征多项式是首一的整系数多项式,$\omega_i(c_l)$ 是它的根, 于是便是代数整数.

下一个定理是本章的核心.

定理 3.4.6 有限群 G 的任一不可约复表示的次数都能整除 $|G|$.

证要: 注意到第一正交关系 $\dfrac{|G|}{\chi_i(1)}=\sum\limits_{l=1}^{s}\dfrac{\chi_i(c_l)}{\chi_i(1)}\overline{\chi_i(g_l)}$, 其中 $g_l\in C_l$. 左边是有理数, 右边由定理 3.4.5 知是一个代数整数, 故由定理 3.4.3 知左边为整数, 由此得到整除关系.

例 3.4.1 设有限群 G 有一个 p 次不可约表示,p 为素数, 则 G 有 p 阶元.

证要: 由定理 3.4.6,$p||G|$, 故由 Cauchy 定理或 Sylow 第一定理知 G 有 p 阶元.

3.5 Burnside 定理

定理 3.5.1 设 G 是有限群,$\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ 是群 G 的所有不等价的不可约复表示, 若 N 是 G 的正规子群, 则 N 等于若干个 $\ker\varphi_i$ 的交.

证要: 将商群 G/N 的正则复表示 $\overline{\rho}$ 提升为 G 的表示 φ, 记表示空间 $\mathbb{C}[G/N]$ 为 V, 由 $\overline{\rho}$ 忠实不难证明 $N=\ker\varphi$, 设 $\varphi\approx\sum\limits_{i=1}^{s}m_i\varphi_i$, 其中 $m_i\geq 1$. 则易得 $N=\ker\varphi=\bigcap\limits_{j=1}^{s}\ker\varphi_i$.

推论 3.5.2 设 G 是有限群,$\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ 是群 G 的所有不等价的不可约复表示, 其中 φ_1 是主表示, 则 G 是单群当且仅当 $\ker\varphi_i=\{1\},2\leq i\leq s$.

引理 3.5.3 设 χ 是有限群 G 的一个不可约复特征标,C 是 G 的一个共轭类, 如果 $(|C|,\chi(1))=1$, 那么 $\forall g\in G$,$\chi(g)=0$ 或 $|\chi(g)|=\chi(1)$.

证要: 由 Bezout 定理: 存在正整数 u,v 使得 $u|C|+v\chi(1)=1$, 于是 $g=u|C|g+v\chi(1)g,\forall g\in G$, 于是 $\dfrac{\chi(g)}{\chi(1)}=u\dfrac{\chi(c)}{\chi(1)}+v\chi(g)=u\omega(c)+v\chi(g)$, 其中 c 是共轭类 C 的类和. 现在已知右边是代数整数, 故左边是代数整数. 假设 $|\chi(g)|\neq\chi(1)$, 那么 $\left|\dfrac{\chi(g)}{\chi(1)}\right|<1$, 令 $a_1=\dfrac{\chi(g)}{\chi(1)}$, 设 $\chi(1)=m,g$ 的阶为 $n,\xi_1,\ldots,\xi_{\varphi(n)}$ 为所有 n 次本原单位根, 由于 $\chi(g)$ 是 m 个 n 次单位根的和, 故可设 $\chi(g)=\sum\limits_{j=1}^{m}\xi_1^{r_j}$, 于是 $a_1=\dfrac{\sum_{j=1}^{m}\xi_1^{r_j}}{m}$. 再令 $a_i=\dfrac{\sum_{j=1}^{m}\xi_i^{r_j}}{m},2\leq i\leq\varphi(n)$, 命 $b=\prod\limits_{i=1}^{\varphi(n)}a_i$.

注意到有同构映射 $\sigma:\mathbb{Q}(\xi_1)\to\mathbb{Q}(\xi_i)$, 且 $\sigma(\xi_1)=\xi_i$, 于是 $\sigma(a_1)=\sigma(a_i)$, 由于这是同构映射, 故 a_1 与 a_i 同为 0 或同不为 0(对每个 $2\leq i\leq\varphi(n)$ 均成立), 故 $a_1=0$ 当且仅当 $b=0$.

考虑 $\varphi(n)$ 元多项式 $f(x_1,\ldots,x_{\varphi(n)})=\prod\limits_{i=1}^{\varphi(n)}\dfrac{\sum_{j=1}^{m}}{x_i^{r_j}}$, 这是一个对称多项式, 于是由对称多项式基本定理: 存在有理系数多项式 $g(x)$ 使得 $f(x_1,\ldots,x_{\varphi(n)})=g(\sigma_1,\ldots,\sigma_{\varphi(n)})$, 其中 $\sigma_i(x_1,\ldots,x_{\varphi(n)})$ 是基本对称多项式. 现在 $\sigma_i(\xi_1,\ldots,\xi_{\varphi(n)})$ 是整数 (我们认为读者熟知此内容, 即多项式 $h(x)=$

$\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\xi_i)$ 是整系数不可约多项式), 于是 $b=f(\xi_1,\ldots,\xi_{\varphi(n)})=g(\sigma_1(\xi_1,\ldots,\xi_{\varphi(n)}),\ldots,\sigma_{\varphi(n)}(\xi_1,\ldots,\xi_{\varphi(n)}))\in\mathbb{Q}$, 而显然 b 是代数整数, 故由定理 3.4.3,b 是整数. 由于 $|\chi(g)|\neq\chi(1)$, 那么 $|a_1|=\left|\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\right|<1$, 但每个 $|a_i|\leq 1$, 于是 $|b|<1$, 于是 $b=0$, 故 $a_1=0$, 故 $\chi(g)=0$.

定理 3.5.4 如果有限群 G 有一个共轭类 C 的元素个数是一个素数的方幂, 那么 G 不是单群.

证要: 引用推论 3.5.2, 只需证明 G 有一个不可约复表示 (非主表示) 的核不等于 $\{1\}$ 即可. 设 $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ 是 G 的全部不可约复表示, 其中 φ_1 是主表示,φ_i 提供的特征标记为 $\chi_i,1\leq i\leq s$. 设 $|C|=p^r,p$ 是素数,$r\geq 1$. 考虑 G 的正则表示 ρ 的分解

$$\rho=\sum_{i=1}^{s}\chi_i(1)\varphi_i.$$

于是有

$$\chi_\rho(g)=\chi_1(1)\chi_1(g)+\sum_{i=2}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g)=1+\sum_{i=2}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g),\forall g\in G.$$

取 $g\in C$, 显然 $g\neq 1$, 因此 $\chi_\rho(g)=0$, 于是 $-1=\sum_{i=2}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g)$, 于是 $\chi_i(g)$ 不全为 0, 设 $j_1,\ldots,j_t$ 使得 $\chi_{j_l}(g)\neq 0$, 而其余 $\chi_i(g)=0$. 假设对每个 j_l 有 $p|\chi_{j_l}(1)$, 设 $\chi_{j_l}(1)=m_lp,1\leq l\leq t$, 于是

$$-\frac{1}{p}=\sum_{l=1}^{t}m_l\chi_{j_l}(g)$$

上式左边是有理数但不是整数, 右边是代数整数, 这与定理 3.4.3 矛盾. 故存在 j_k 使 $(p,\chi_{j_k})=1$, 于是 $(|C|,\chi_{j_k})=1$, 现在 $\chi_{j_k}\neq 0$, 故由引理 3.5.3 知 $|\chi_{j_k}(g)|=\chi_{j_k}(1)$, 从而其提供的矩阵表示 $\Phi_{j_k}(g)$ 是数量矩阵. 如果 $\ker\varphi_{j_k}=\{1\}$, 那么 $G\cong\mathrm{Im}\varphi_{j_k}\cong\mathrm{Im}\Phi_{j_k}$, 但 $\Phi_{j_k}(g)\in\mathrm{Z}(\mathrm{Im}\Phi_{j_k})$, 故由同构知 $g\in\mathrm{Z}(G)$, 于是 g 所在的共轭类 C 只含 g 一个元素, 这与题设矛盾! 故 $\ker\varphi_{j_k}\neq\{1\}$, 于是由推论 3.5.2,$G$ 不是单群.

定理 3.5.5(Burnside) 设 p,q 为素数,a,b 为非负整数, 则 p^aq^b 阶群是单群.

证要: 从抽象代数课已经知道 p-群与 pq 阶群都是可解群, 其中 p,q 都是素数,Abel 群也是可解群. 接下来设 $a\neq 0,b\neq 0,p\neq q$ 且 G 是非 Abel 群. 对 $|G|$ 归纳,$a=b=1$ 时即为 pq 阶群, 可解. 假设对所有 $c\leq a,d\leq b$ 且等号不同时成立的 c,d,p^cq^d 都是可解的, 接下来考虑 $|G|=p^aq^b$, 为使用归纳假设, 需找到 G 的一个非平凡正规子群. 考虑 G 的 Sylow$q$-子群 Q, 它有非平凡的中心 $\mathrm{Z}(Q)$, 取非单位元 $g\in\mathrm{Z}(Q)$, 设 g 在 G 中的中心化子为 $C_G(g):=\{h\in G|gh=hg\}$, 则 $Q\subset C_G(g)$, 于是 $|C_G(g)|=p^lq^b$. 考虑 g 所在的共轭类 C, 则有

$$|C|=\frac{|G|}{|C_G(g)|}=p^{a-l}.$$

若 $a=l$, 则 $|C|=1$, 故 $g\in\mathrm{Z}(G)$, 于是 $N=\mathrm{Z}(G)$ 就是非平凡正规子群; 若 $a<l$, 则由定理 3.5.4 得 G 不是单群, 故 G 仍有非平凡正规子群 N. 综合上述两种情况, 有 $|N|<|G|,|G/N|<|G|$, 故由归纳假设,N 与 G/N 均可解, 于是 G 可解. 综上, 由归纳法, 命题成立.

Chapter 4

表示的张量积与群的直积的表示

4.1 群的表示的张量积

定义 4.1.1 设 $(\varphi, V), (\psi, W)$ 是有限群 G 的两个 K-线性表示, 我们定义

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : & G \to \mathrm{GL}(V \otimes_K W) \\ & g \mapsto \varphi(g) \otimes \psi(g). \end{aligned}$$

则 $\varphi \otimes \psi$ 也是 G 的一个线性表示, 称其为表示 φ 与 ψ 的张量积.

定理 4.1.1 设 $(\varphi, V), (\psi, W)$ 是有限群 G 的两个有限维 K-线性表示, 则 $\chi_{\varphi\otimes\psi}(g) = \chi_\varphi(g)\chi_\psi(g)$.

证要: 利用张量积的知识 $\chi_{\varphi\otimes\psi}(g) = \mathrm{tr}((\varphi \otimes \psi)(g)) = \mathrm{tr}(\varphi(g) \otimes \psi(g)) = \mathrm{tr}(\varphi(g))\mathrm{tr}(\psi(g)) = \chi_\varphi(g)\chi_\psi(g)$.

推论 4.1.2 群 G 的两个特征标之积还是群 G 的特征标.

表示的张量积可以从旧的不可约表示构造新的, 同次数的不可约表示.

定理 4.1.3 设 (φ, V) 是群 G 的 1 次 K-表示,(ψ, W) 是群 G 的 n 次不可约 K-表示, 则 $(\varphi \otimes \psi, V \otimes_K W)$ 也是群 G 的 n 次不可约表示.

证要: 次数是显然的:$\dim_K(V \otimes_K W) = (\dim_K V)(\dim_K W) = n$.

至于不可约, 考虑矩阵表示, 注意到 $(\Phi \otimes \Psi)(g) = \Phi(g) \otimes \Psi(g) = \Phi(g)\Psi(g)$, 注意到 $\Phi(g)$ 是域 K 上的非零元, 于是 $(\Phi \otimes \Psi)(g)$ 与 $\Psi(g)$ 必定被同时上三角化, 于是二者的可约性相同, 于是由 Ψ(即 ψ) 的不可约性便得到 $\varphi \otimes \psi$ 的不可约性.

4.2 群的直积的表示

定义 4.2.1 设群 G_1, G_2 分别有 K-表示 (φ, V) 与 (ψ, W), 令 $G = G_1 \times G_2$ 为两个群的直积, 定义

$$\begin{aligned}\varphi \otimes \psi : & G \to V \otimes_K W \\ & (g_1, g_2) \mapsto \varphi(g_1) \otimes \psi(g_2).\end{aligned}$$

容易验证这是群 G 的线性表示, 我们仍然称这是表示 φ 与 ψ 的张量积.

与定理 4.1.1 类似, 我们有

定理 4.2.1 $\chi_{\varphi\otimes\psi}(g_1, g_2) = \chi_\varphi(g_1)\chi_\psi(g_2)$.

下面定理是表示的等价的问题:

定理 4.2.2 设 $G = G_1 \times G_2$,K 是任意域, 设 $(\varphi, V), (\varphi', V')$ 是 G_1 的两个 K-表示,$(\psi, W), (\psi', W')$ 是 G_2 的两个 K-表示. 那么:

(1) 若 $\varphi \approx \varphi'$ 且 $\psi \approx \psi'$, 则 $\varphi \otimes \psi \approx \varphi' \otimes \psi'$;

(2) 若 $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ 都是有限维不可约表示, 则从 $\varphi \otimes \psi \approx \varphi' \otimes \psi'$ 可推出 $\varphi \approx \varphi', \psi \approx \psi'$.

证要:(1) 由等价知有同构 $\sigma : V \to V', \tau : W \to W'$ 使得

$$\varphi'(g_1)\sigma = \sigma\varphi(g_1), \forall g_1 \in G_1$$
$$\psi'(g_2)\tau = \tau\psi(g_2), \forall g_2 \in G_2$$

成立, 容易验证 $\sigma \otimes \tau : V \otimes_K W \to V \otimes_K W$ 也是同构, 且

$$(\varphi' \otimes \psi')(g_1, g_2)(\sigma \otimes \tau) = (\sigma \otimes \tau)(\varphi \otimes \psi)(g_1, g_2), \forall (g_1, g_2) \in G.$$

于是 $\varphi \otimes \psi \approx \varphi' \otimes \psi'$;

(2) 现在有左 $K[G]$ 模同构 $V \otimes_K W \cong V' \otimes_K W'$, 注意到 G_1 是 G 的子群, 因此前述同构也是左 $K[G_1]$ 模同构. 设 $\dim_K W = m$, 于是有线性空间同构 $W \cong \sum_{j=1}^{m} K$. 由于 V 是 $(K[G_1, K])$ 双模, 于是有左 $K[G_1]$-模同构

$$V \otimes_K W \cong \sum_{j=1}^{m} V \otimes_K K \sum_{j=1}^{m} V.$$

设 $\dim_K W' = n$, 同理可得 $V' \otimes_K W' \cong \sum_{j=1}^{n} V'$.

注意到 φ 不可约, 于是 V 是单左 $K[G_1]$-模, 于是左 $K[G_1]$-模 $V \otimes_K W$ 有长度为 m 的合成列

$$\sum_{j=1}^{m} V \supset \sum_{j=1}^{m-1} V \supset \cdots \supset V \supset 0;$$

同理:$V' \otimes_K W'$ 也有长度为 n 的合成列

$$\sum_{j=1}^{n} V' \supset \sum_{j=1}^{n-1} V' \supset \cdots \supset V' \supset 0;$$

由于有左 $K[G_1]$ 模同构 $V\otimes_K W\cong V'\otimes_K W'$, 于是由 Jordan-Hölder 定理 (定理 0.3.15) 知 $m=n$ 且有左 $K[G_1]$-模同构 $V\cong V'$, 于是 $\varphi\approx\varphi'$.

同理可得 $\psi\approx\psi'$.

下面一个定理是关于表示的不可约性.

定理 4.2.3 设 K 是任一域,$(\varphi,V),(\psi,W)$ 分别是 G_1,G_2 的有限维 K-线性表示,$G=G_1\times G_2$.

(1) 如果 $\varphi\otimes\psi$ 不可约, 则 φ 与 ψ 均不可约;

(2) 当 $K=\mathbb{C}$ 时, 由 φ 与 ψ 均不可约可推出 $\varphi\otimes\psi$ 不可约.

证要:(1) 用反证法, 假设 φ 可约, 于是 V 有非平凡的 G_1 不变子空间 V_1, 设 $V=V_1\oplus V_2$, 于是有线性空间同构 $V\otimes_K W\cong V_1\otimes_K W\oplus V_2\otimes_K W$. 可将 $V_1\otimes_K W$ 看成 $V\otimes_K W$ 的子空间, 由于

$$0<\dim V_1\otimes_K W=(\dim V_1)(\dim W)<(\dim V)(\dim W)=\dim V\otimes_K W,$$

故这是非平凡的线性子空间. 注意到对任意 $(g_1,g_2)\in G, v_1\in V_1$ 有

$$(\varphi\otimes\psi)(g_1,g_2)(v_1\otimes w)=(\varphi(g_1)(v_1))\otimes(\psi(g_2)(w))\in V_1\otimes_K W,$$

这里用到了 V_1 是 G_1 不变子空间. 于是 $(\varphi\otimes\psi)(g_1,g_2)$ 作用在 $V_1\otimes_K W$ 的一组生成元上的值均在 $V_1\otimes_K W$ 中, 于是 $V_1\otimes_K W$ 是其不变子空间, 于是 $V_1\otimes_K W$ 是 $\varphi\otimes\psi$ 的不变子空间, 这与题设 $\varphi\otimes\psi$ 不可约矛盾!

故 φ 不可约, 同理:ψ 不可约.

(2) 注意到

$$\begin{aligned}(\chi_{\varphi\otimes\psi},\chi_{\varphi\otimes\psi})&=\frac{1}{|G|}\sum_{(g_1,g_2)\in G}\chi_{\varphi\otimes\psi}(g_1,g_2)\overline{\chi_{\varphi\otimes\psi}(g_1,g_2)}\\&=\frac{1}{|G_1||G_2|}\sum_{g_1\in G_1}\sum_{g_2\in G_2}\chi_\varphi(g_1)\chi_\psi(g_2)\overline{\chi_\varphi(g_1)\chi_\psi(g_2)}\\&=\left(\frac{1}{|G_1|}\sum_{g_1\in G_1}\chi_\varphi(g_1)\overline{\chi_\varphi(g_1)}\right)\left(\frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2\in G_2}\chi_\psi(g_2)\overline{\chi_\psi(g_2)}\right)\\&=(\chi_\varphi,\chi_\varphi)(\chi_\psi\chi_\psi)=1.\end{aligned}$$

于是 $\varphi\otimes\psi$ 不可约.

引理 4.2.4 设 G_1,G_2 都是有限群,$C_1,\ldots,C_s$ 是 G_1 的所有共轭类,g_i 为 C_i 的代表元 ,$1\le i\le s$.$C'_1,\ldots,C'_t$ 是 G_2 的所有共轭类,g'_i 为 C'_i 代表元 ,$1\le i\le t$. 那么 $C_i\times C'_j, 1\le i\le s, 1\le j\le t$ 是 $G=G_1\times G_2$ 的全体共轭类,$(g_i,g_j), 1\le i\le s, 1\le j\le t$ 是其代表元.

证要: 注意到 (x_1,x_2) 与 (y_1,y_2) 在 G 中共轭 $\Leftrightarrow$ 存在 $(g_1,g_2)\in G$ 使得 $(g_1,g_2)(x_1,x_2)(g_1,g_2)^{-1}=(y_1,y_2)\Leftrightarrow$ 存在 $g_1\in G_1, g_2\in G_2$ 使得 $g_ix_ig_i^{-1}=y_i, i=1,2\Leftrightarrow x_i,y_i$ 在 G_i 中共轭 $(i=1,2)$.

定理 4.2.5 设 G_1,G_2 都是有限群,$\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ 是 G_1 的所有不等价的不可约复表示,$\psi_1,\ldots,\psi_t$ 是 G_2 的所有不等价的不可约复表示, 那么

$$\{\varphi_i\otimes\psi_j|1\le i\le s, 1\le j\le t\}$$

是群 $G = G_1 \times G_2$ 的所有不等价的不可约复表示.

证要: 由定理 4.2.2 与定理 4.2.3 知上述 st 个表示是 G 的 st 个两两不等价的不可约复表示, 又结合引理 4.2.4 与定理 2.2.4(2) 知 G 恰好只有 st 个两两不等价的不可约复表示, 于是命题成立.

推论 4.2.6 条件同定理 4.2.5. 若 G_1, G_2 的复特征标表分别为 T_1, T_2, 则 G 的复特征标表 $T = T_1 \otimes T_2$.

证要: 结合定理 4.2.5, 定理 4.2.1 与矩阵的张量积公式直接算即可.

最后我们给出不可约复表示次数满足的又一条件:

定理 4.2.7(Schur) 有限群 G 的任意不可约复表示的次数能整除 $[G : \mathrm{Z}(G)]$, 其中 $\mathrm{Z}(G)$ 是 G 的中心.

证要 (J.Tate): 取 G 的不可约复表示 (φ, V), 它提供的特征标为 χ. 任取 $a \in \mathrm{Z}(G)$, 那么 $\varphi(a)$ 与一切 $\varphi(g)$ 可交换, 但 φ 不可约, 于是 $\varphi(a)$ 是数量矩阵, 故存在 $\lambda(a) \in \mathbb{C}^*$ 使得 $\varphi(a) = \lambda(a)1_V$. 显然映射 $a \mapsto \lambda(a)$ 是 G 到乘法群 $\mathbb{C}^*$ 的群同态.

对正整数 m, 考虑左 $\mathbb{C}[G]$-模 V 的 m 重外张量积

$$V^{(m)} := V \otimes V \otimes \cdots \otimes V.$$

由于 (φ, V) 不可约, 由定理 4.2.3 结合归纳法知 $G \times G \times \cdots \times G$ 的表示 $(\varphi \otimes \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi, V^{(m)})$ 不可约.

令

$$H_m := \{(a_1, \ldots, a_m) | a_1 a_2 \ldots a_m = 1, a_i \in \mathrm{Z}(G), 1 \le i \le m\}.$$

则 H_m 是 $\mathrm{Z}(G) \times \cdots \times \mathrm{Z}(G)$ 的子群, 且 $|H_m| = |\mathrm{Z}(G)|^{m-1}$. 任取 $(a_1, \ldots, a_m) \in H_m, v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \in V^{(m)}$ 有

$$\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_m)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) &= (a_1 v_1) \otimes \cdots \otimes (a_m v_m) \\
&= (\lambda(a_1) v_1) \otimes \cdots \otimes (\lambda(a_m) v_m) \\
&= (\lambda(a_1) \ldots \lambda(a_m))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \\
&= (\lambda(a_1 \ldots a_m))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \\
&= (\lambda(1))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m),
\end{aligned}$$

于是 $(a_1, \ldots, a_m) \in \ker(\varphi \otimes \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi)$, 故 $H_m \subset \ker(\varphi \otimes \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi)$, 而子群 H_m 显然是正规的. 注意到 $\varphi \otimes \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi$ 不可约, 于是结合定理 1.4.2 知存在 $G \times G \times \cdots \times G / H_m$ 的不可约表示 ψ 使得 ψ 的提升等于 $\varphi \otimes \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi$, 由表示的提升的定义知, 二者表示空间相同, 因此维数相同, 均为 $\chi(1)^m$. 据定理 3.4.6 知 $\chi(1)^m$ 整除 $\dfrac{|G|^m}{|H_m|} = [G : \mathrm{Z}(G)]^m |\mathrm{Z}(G)|$.

于是对每个正整数 $m, \alpha = \dfrac{[G : \mathrm{Z}(G)]}{\chi(1)}$ 均满足

$$\alpha^m = \frac{\text{某个整数}}{|\mathrm{Z}(G)|} \in \frac{1}{|\mathrm{Z}(G)|}\mathbb{Z}.$$

于是 $\mathbb{Z}[\alpha]\subset\dfrac{1}{|\mathrm{Z}(G)|}\mathbb{Z}$, 后者是有限生成 $\mathbb{Z}$-模, 而 $\mathbb{Z}$ 是主理想整环, 于是 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 是有限生成的, 据定理 3.4.1,α 是代数整数, 而显然 α 是有理数, 故由定理 3.4.3, 它是整数, 因此 φ 的次数 $\chi(1)$ 整除 $[G:\mathrm{Z}(G)]$.

Chapter 5

诱导表示与诱导特征标

5.1 诱导表示及其特征标

定义 5.1.1

5.2 诱导特征标不可约的判定

我们首先讨论群 G 的双陪集, 双陪集具有类似于左 (右) 陪集的性质.

定义 5.2.1 设 L, H 是群 G 的两个子群, 在群 G 上定义如下二元关系 $\sim$:

$$x \sim y\text{当且仅当}\exists l \in L, h \in H, x = lgh.$$

容易验证这是一个等价关系, 且 $g \in G$ 所在的等价类为 LgH. 我们将 LgH 称为群 G 的子群对 (L, H) 的一个双陪集. 由于 LgH 是等价类, 因此它们要么相等要么不交, 并且这些等价类构成群 G 的一个划分. 当 G 为有限群时, 两两不等的等价类个数有限, 在它们每一个里面取一个代表元 g_i, 有

$$G = \bigcup_{i=1}^{t} Lg_iH,$$

且 Lg_iH 两两不等, 此时称 $\{g_1, \ldots, g_t\}$ 是子群对 (L, H) 的一个双陪集代表系.

对双陪集 LgH, 取定 $l \in L$, 则得到 H 的一个左陪集 lgH, 于是双陪集都是 H 的左陪集的并, 因此我们可以思考 (L, H) 的双陪集代表系与 H 的左陪集代表系之间的关系.

定理 5.2.1 设 L, H 是群 G 的两个子群,$\{g_1, \ldots, g_t\}$ 是子群对 (L, H) 的一个双陪集代表系, 定义

$$L_i := L \bigcap g_iHg_i^{-1}.$$

若 L_i 在 L 中 (即作为 L 的子群) 的左陪集代表系为 $\{y_{i1,\ldots,y_{ir_i}}\}$, 那么

(1)Lg_iH=$\bigcup_{j=1}^{r_i} y_{ij}g_iH$, 且右边的 r_i 个陪集两两不等;

(2)H 的一个左陪集代表系为 $\{y_{ij}g_i|1\le i\le t, 1\le j\le r_i\}$.

证要:(1) 由于 $L_i = L\bigcap g_iHg_i^{-1}\subset g_iHg_i^{-1}$, 故 $L_ig_iH\subset g_iHg_i^{-1}g_iH\subset g_iH$, 同时由 $y_{ij}\in L$ 知 $y_{ij}g_iH\subset Lg_iH$, 故

$$Lg_iH=\bigcup_{j=1}^{r_i}y_{ij}L_ig_iH\subset\bigcup_{j=1}^{r_i}y_{ij}y_{ij}g_iH\subset Lg_iH.$$

于是等式成立.

另外,$y_{ij}g_iH=y_{ij'}g_iH\Leftrightarrow g_i^{-1}y_{ij'}^{-1}y_{ij}g_i\in H\Leftrightarrow y_{ij'}^{-1}y_{ij}\in L\cap g_iHg_i^{-1}=L_i\Leftrightarrow j=j'$. 于是右边的左陪集两两不等;

(2) 由定义 5.2.1 中分解与 (1) 知 $G=\cup_{i=1}^{m}Lg_iH=\sup_{i=1}^{t}\cup_{j=1}^{r_i}y_{ij}g_iH$, 由 Lg_iH 两两不交与 (1) 的后半句话知前述分解中左陪集两两不交, 由此得出左陪集代表系 $\{y_{ij}g_i|1\le i\le t, 1\le j\le r_i\}$.

现在我们回到诱导表示. 下一个定义给出两个符号 φ^g 与 μ^g.

定义 5.2.2 设 H 是 G 的子群, 且 H 有线性表示 (φ, V), 对 $g\in G$, 定义

$$\begin{aligned}\varphi^g :&gHg^{-1}\to \mathrm{GL}(V)\\ &y\mapsto\varphi(g^{-1}yg)\end{aligned}$$

容易验证它合理定义且给出了群 gHg^{-1} 的一个表示.

若 φ 有特征标 μ, 则将表示 φ^g 的特征标记为 μ^g, 于是 $\mu^g(y)=\mu(g^{-1}yg)$.

有一个符号的说明: 设 G 是有限群, 且有子群 L, H, 设 $\{g_1,\dots,g_t\}$ 是子群对 (L,H) 的一个双陪集代表系, 我们将 μ^{g_i} 简记为 μ^i

定理 5.2.2(Mackey) 子群定理 设 G 是有限群, 且有子群 L, H, 设 $\{g_1,\dots,g_t\}$ 是子群对 (L,H) 的一个双陪集代表系, 令 $L_i:=L\bigcap g_iHg_i^{-1}$, 设 μ, λ 分别为子群 H, L 的一个复特征标, 那么:

(1)$\mu^G|L=\sum\limits_{i=1}^{t}(\mu^i|L_i)^L$;

(2)$(\lambda^G,\mu^G)_G=\sum\limits_{i=1}^{t}(\lambda|L_i,\mu^i|L_i)_{L_i}$.

证要: 又是计算题. 我们沿用定理 5.2.1 的记号.

(1) 利用本章第一节结论及定理 5.2.1 得:

$$\begin{aligned}\mu^G(y)&=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\dot\mu((y_{ij}g_i)^{-1}y(y_{ij}g_i))\\&=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\dot\mu^{g_i}(y_{ij}^{-1}yy_{ij})\\&=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}(\mu^{g_i}\dot{|}L_i)(y_{ij}^{-1}yy_{ij})\\&=\sum_{i=1}^{t}(\mu^{g_i|L_i})^L(y)=\sum_{i=1}^{t}(\mu^i|L_i)^L.\end{aligned}$$

(2) 利用第 (1) 问及 Frobenius 互反律得:

$$\begin{aligned}(\lambda^G, \mu^G)_G = (\lambda, \mu^G|L)_L &= \left(\lambda, \sum_{i=1}^{t} (\mu^i|L_i)^L\right)_L \\ &= \sum_{i=1}^{t} (\lambda, (\mu^i|L_i)^L)_L \\ &= \sum_{i=1}^{t} (\lambda|L_i, \mu^i|L_i)_{L_i}.\end{aligned}$$

引理 5.2.3 设 H 为有限群 G 的子群,μ 是 H 的一个复特征标, 则对 $g \in G$ 有

$$(\mu^g, \mu^g)_{gHg^{-1}} = (\mu, \mu)_H.$$

证要: 直接计算即可.

$$\begin{aligned}(\mu^g, \mu^g)_{gHg^{-1}} &= \frac{1}{|gHg^{-1}|} \sum_{y \in gHg^{-1}} \mu^g(y)\overline{\mu^g(y)} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in gHg^{-1}} \mu(g^{-1}yg)\overline{\mu(g^{-1}yg)} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \mu(h)\overline{\mu(h)} \\ &= (\mu, \mu)_H.\end{aligned}$$

接下来便可以叙述诱导特征标不可约的判定方法了.

定理 5.2.4 设 H 是有限群 G 的子群,(H, H) 在 G 中的双陪集代表系为 $\{g_1 = 1, g_2, \dots, g_t\}$, 记 $H_i = g_iHg_i^{-1}, 1 \le i \le t$. 设 μ 是 H 的一个复特征标, 则 μ^G 不可约当且仅当下面两条成立:

(1)μ 不可约;

(2) 对每个 $i \ge 2, H_i$ 的两个特征标 $\mu^i|H_i$ 和 $\mu|H_i$ 满足 $(\mu^i|H_i, \mu|H_i)_{H_i} = 0$(即它们没有公共的不可约成分, 此时称这两个特征标不交).

证要: 还是计算题.

由 Mackey 子群定理, 注意到 $(\mu^G, \mu^G)_G = \sum_{i=1}^{t} (\mu|H_i, \mu^i|H_i)_{H_i} = (\mu, \mu)_H + \sum_{i=2}^{t} (\mu|H_i, \mu^i|H_i)_{H_i}$, 以及 $(\mu^G, \mu^G) \ge 1$, 等号成立当且仅当 μ^G 不可约,$(\mu, \mu)_H \ge 1$, 等号成立当且仅当 μ 不可约即可.

推论 5.2.5 设 H 是有限群 G 的子群, 对 $x \in G$, 定义 $H_x = xHx^{-1}$. 设 μ 是 H 的一个复特征标, 则 μ^G 不可约当且仅当下面两条成立:

(1)μ 不可约;

(2) 对每个 $x \notin H, (\mu^x|H_x, \mu|H_x)_{H_x} = 0$.

证要: 关键在于, 当 $x \notin H$ 时, 双陪集 HgH 不等于 $H1H = H$, 因此可以令定理 5.2.4 中 (H, H) 的双陪集代表系内某个异于 $g_1 = 1$ 的 g_i 取 x.

推论 5.2.6 设 N 是有限群 G 的正规子群,N 在 G 中的陪集代表系为 $\{g_1 = 1, g_2, \dots, g_t\}$, 设 μ 是 N 的一个复特征标, 则 μ^G 不可约当且仅当 μ 不可约且 μ^i 与 μ 不相等 $(2 \le i \le t)$.

证要: 注意到当 N 是正规子群时,$NgN = gN$ 以及 $N_i = N \bigcap g_i N g_i^{-1} = N$, 因此 μ^i 也是 N 的特征标. 于是只需要证明: 当 μ 不可约时 $(\mu, \mu^i)_N = 0$ 当且仅当 μ 与 μ^i 不相等, 而根据引理 5.2.3 可知 μ 不可约蕴含 μ^i 不可约, 而不可约复特征标不交当且仅当它们不相等.

定义 5.2.3 设 χ 是群 G 的一个复特征标, 设 C 为 G 的一个共轭类, 由于 χ 为 G 上的类函数, 因此任意 $g \in C, \chi(g)$ 的值相等, 故可以用记号 $\chi(C)$ 记这个值, 即定义

$$\chi(C) := \chi(g), g\text{为}C\text{中任意一个元素}$$

是合理的.

此时, 设 G 的所有共轭类为 $C_1, C_2, \ldots, C_s$,g_i 为 G_i 的代表元,$1 \le i \le s$. 设 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ 是 G 的所有不相等的复特征标, 则 G 的复特征标表 T 满足

$$T = (\chi_i(g_j))_{s\times s} = (\chi_i(C_j))_{s\times s}.$$

下一个定理的证明富有技巧性.

定理 5.2.7(Brauer) 设 G 是有限群, 把 G 的所有共轭类 $C_1, C_2, \ldots, C_s$ 组成的集合记作 Ω,g_i 为 G_i 的代表元,$1 \le i \le s$. 设 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ 是 G 的所有不相等的复特征标, 它们组成的集合记作 $\mathrm{Irr}(G)$. 设有限群 A 在 Ω 上有一个作用, 并且 A 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 上也有一个作用, 使得

$$(a\chi_i)(aC_j) = \chi_i(C_j), \forall a \in A, 1 \le i, j \le s.$$

对任意 $a \in A$, 用 $F_1(a)$ 表示 a 在 Ω 中的不动点个数, 用 $F_2(a)$ 表示 a 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 中不动点个数. 则:

(1)$|F_1(a)| = |F_2(a)|, \forall a \in A$;

(2)Ω 的 A-轨道条数等于 $\mathrm{Irr}(G)$ 的 A-轨道条数.

5.3 群的分裂域与模的分裂域

给定域 K, 设群 G 有一个 K-线性表示 (φ, V), 若 F 为 K 的扩域, 如何通过 (φ, V) 构造一个 F 上的线性表示呢?, 我们先从线性空间基域的扩张谈起.

定理 5.3.1 设有域扩张 F/K,V 是 K 上的线性空间, 则

$$V^F := F \otimes_K V$$

是域 F 上的线性空间. 当 $\dim_K V = r$ 时, 设 V 在 K 上的基为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, 则 $\dim_F V^F = r$ 且 V^F 在 F 上的基为 $\{1 \otimes \alpha_1, \ldots, 1 \otimes \alpha_r\}$.

证要: 注意到由域扩张知,F 为 (F, K) 双模而 V 为 (K, K) 双模, 故 V^F 是 (左)F-模, 因此是 F 上的线性空间.

V^F 由 $f \otimes v, f \in F, v \in V$ 生成, 而 $f \otimes v = f \otimes \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} (f k_i)(1 \otimes \alpha_i)$, 故 $\{1 \otimes \alpha_1, \ldots, 1 \otimes \alpha_r\}$ 张成 V^F.

另外, 有左 F-模同构 $V^F = F\otimes_K V \cong F\otimes_K \sum_{i=1}^{r} K \cong \sum_{i=1}^{r} F\otimes_K K \cong \sum_{i=1}^{r} F$, 故 V^F 为 r 维, 综上便得 V^F 在 F 上的基为 $\{1\otimes\alpha_1,\ldots,1\otimes\alpha_r\}$.

以下设 V 都是有限维线性空间.

定理 5.3.2 记号同定理 5.3.2, 映射

$$\begin{aligned}\psi :&V \to V^F\\ &\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i \mapsto \sum_{i=1}^{r} k_i(1\otimes\alpha_i), k_i\in K,\end{aligned}$$

是 V 到 V^F 的 (作为域 K 上线性空间的) 子空间 $V_1^F = \left\{\sum_{i=1}^{r} k_i(1\otimes\alpha_i)\middle| k_i\in K\right\}$ 的 K-线性同构.

注 由此结论, 我们可以将 V 与 V_1^F 等同, 即将 V 看成 V^F 的子集, 并将 $1\otimes\alpha_i$ 与 α_i 等同, 因此 $V^F = \left\{\sum_{i=1}^{r} f_i\alpha_i\middle| f_i\in F\right\}$. 以后我们将一直保持此处的记号

证要: 由于 V^F 是 F 上的线性空间, 它自然也是 K 上的线性空间, 而 ψ 是线性同构是显然的.

定理 5.3.3 对 V 上的线性变换 A, 定义

$$\begin{aligned}A^F :&V^F \to V^F\\ &\sum_{i=1}^{r} f_i\alpha_i \mapsto \sum_{i=1}^{r} f_iA(\alpha_i),\end{aligned}$$

则 A^F 是 V^F 上的线性变换.

我们有:

(1)$1_V^F = 1_{V^F}$, 即 V 上恒等映射 1_V 经上述变换变成 V^F 上恒等映射 1_{V^F};

(2)$(kA+lB)^F = kA^F + lB^F, k,l\in K$, 即映射 $A\mapsto A^F$ 是 K-线性映射;

(3)$A=0$ 当且仅当 $A^F=0$, 结合 (2) 知映射 $A\mapsto A^F$ 是单射;

(4)$(AB)^F = A^FB^F$, 即映射 $A\mapsto A^F$ 保持复合 (乘法), 结合 (2) 知映射是 K-代数同态;

(5)A 可逆当且仅当 A^F 可逆, 结合 (3)、(4) 知映射 $A\mapsto A^F$ 限制在 $\mathrm{GL}(V)$ 上是 $\mathrm{GL}(V)$ 到 $\mathrm{GL}(V^F)$ 的单同态;

(6)A 在基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$($V$ 的基) 下的矩阵与 A^F 在基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$($V^F$ 的基) 下的矩阵相同 (区别是一个是 K 上的矩阵, 一个是 F 上的矩阵但矩阵的每一个元素都在子域 K 上取值).

证要: 计算即可.

接下来便可以定义 G 在扩域 F 上的一个线性表示了.

定义 5.3.1 设有域扩张 F/K, 有限群 G 有一个 K-表示 (φ,V), 定义

$$\begin{aligned}\varphi^F :&G \to \mathrm{GL}(V^F)\\ &g \mapsto \varphi(g)^F,\end{aligned}$$

定理 5.3.3 告诉我们 φ^F 是合理定义的且是 G 到 $\mathrm{GL}(V^F)$ 的群同态, 由此我们得到了 G 的线性表示 (φ^F, V^F).

从定理 5.3.3(6) 可以得知 $\varphi(g)$ 与 $\varphi(g)^F$ 对应的矩阵相同, 故 $\chi_{\varphi^F}(g) = \chi_\varphi(g)$.

我们特别关注不可约特征标, 因此希望关注不可约特征标 φ 经上述变换后的特征标 φ^F 是否仍然不可约, 但一般情况下结论不成立, 我们有下面的例子:

例 5.3.1 考虑三阶循环群 $\mathbb{Z}_3$, 它有一个 2 次不可约实表示 φ, 其矩阵表示 Φ 为

$$\Phi(\overline{1}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Phi(\overline{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\chi_\varphi(\overline{1}) = \chi_\varphi \overline{2} = -1, \chi_\varphi(\overline{0}) = 2$, 故我们有

$$(chi_{\varphi^{\mathbb{C}}}, \chi_{\varphi^{\mathbb{C}}}) = \frac{1}{3}[2^2 + (-1)(-1) + (-1)(-1)] = 2$$

因此 $\chi_{\varphi^{\mathbb{C}}}$ 可约.

定义 5.3.2 群 G 的不可约 K-表示 (φ, V) 称为绝对不可约, 如果对于 K 的每一个扩域 F 都有 (φ^F, V^F) 是 G 的不可约表示.

定义 5.3.3 如果 G 的每一个不可约 K-表示都是绝对不可约的, 则域 K 是群 G 的分裂域.

有限群的分裂域是商群继承的:

定理 5.3.4 设 N 是有限群 G 的正规子群,K 是群 G 的分裂域, 则 K 也是商群 G/N 的分裂域.

证要: 设 $\overline{\varphi}$ 是 G/N 的不可约表示,F 是 K 的扩域. 由定理 1.4.2 知 $\overline{\varphi}$ 的提升 φ 是不可约的, 由 K 是 G 的分裂域, 故 φ^F 是不可约的, 于是再由定理 1.4.2,φ^F 关于正规子群 N 的分解 $\overline{\varphi^F}$ 不可约. 接下来只需证明 $\overline{\varphi^F} = \overline{\varphi}^F$.

我们考虑矩阵表示, 结合定理 5.3.3 与表示的提升的定义知 $\overline{\Phi^F}(gN) = \Phi^F(g) = \Phi(g) = \overline{\Phi}(gN) = \overline{\Phi}^F(gN)$.

综上所述,$\overline{\varphi}^F$ 不可约, 故由定义知 K 是商群 G/N 的分裂域.

定理 5.3.5 设 K 是有限 Abel 群 G 的分裂域, 则 G 的一切不可约 K-表示都是 1 次的.

证要: 考虑 K 的代数闭包 $\overline{K}$, 设 φ 是 G 的不可约表示, 则 $\varphi^{\overline{K}}$ 也是 G 的不可约表示, 但 $\overline{K}$ 是代数闭域, 故由推论 1.3.2 知,$\varphi^{\overline{K}}$ 是 1 次的, 因此 φ 也是 1 次的.

为了探究域 K 称为有限群 G 的分裂域的充要条件, 我们仍然要利用群代数 $K[G]$ 上的左模与群的线性表示的关系, 为此, 先定义模的分裂域.

定理 5.3.6 设有域扩张 F/K,A 是 K 上的代数, 则

$$A^F := F \otimes_K A$$

是域 F 上的代数. 当 $\dim_K A = r$ 时, 设 A(作为 K-线性空间) 在 K 上的基为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, 则 $\dim_F A^F = r$ 且 A^F(作为 F-线性空间) 在 F 上的基为 $\{1 \otimes \alpha_1, \ldots, 1 \otimes \alpha_r\}$.

因此我们将 $1 \otimes \alpha_i$ 与 α_i 等同, 则 $A^F = \left\{ \sum_{i=1}^r f_i \alpha_i \middle| f_i \in F \right\}$, 此后将一直沿用这个记号.

证要: 线性空间部分同定理 5.3.1 与定理 5.3.2, 关键在于如何定义乘法.F-线性空间 A^F 在下述乘法

$$\left(\sum_{i=1}^{r} f_i\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r} l_j\alpha_j\right) := \left(\sum_{i,j=1}^{r}(f_il_j\alpha_i\alpha_j)\right)$$

下称为 F 上的代数. 其单位元为 $1\otimes 1_A$.

类似地定义模的基域的扩张:

定理 5.3.7 设有域扩张 F/K,A 是 K 上的代数,M 是左 A-模, 则 M 也是 K-线性空间, 则 $M^F := F\otimes_K M$ 是 F 上的线性空间. 当 M 为有限维时, 设其 K-基为 $\{m_1,\ldots,m_s\}$, 将 $1\otimes m_i$ 与 m_i 等同, 那么 M^F 的 F-基为 $\{m_1,\ldots,m_s\}$.

定义代数 A^F 与 M^F 的乘法

$$\left(\sum_{i=1}^{r} f_i\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r}\lambda_j m_j\right) := \sum_{i,j=1}(f_i\lambda_j)(\alpha_i m_j),$$

则 M^F 称为左 A^F-模.

定义 5.3.4 设 A 是域 K 上的代数, 如果不可约左 A-模 M 满足: 对任意域扩张 F/K, 左 A^F-模 M^F 都是不可约的, 则称 M 绝对不可约.

定义 5.3.5 设 A 是域 K 上的代数,F 是 K 的扩域, 如果每一个不可约左 A^F 模都是绝对不可约的, 则称 F 是 K 上代数 A 的分裂域.

在得到分裂域的充要条件之前, 我们需要先对 (非交换) 环做一些铺垫, 见第零章第 5 节.

定理 5.3.8 设 A 是域 K 上的有限维代数,M 是不可约左 A-模, 且 M 作为 K 上的向量空间是有限维的, 那么 M 是绝对不可约的充要条件是

$$\mathrm{Hom}_A(M,M)\cong K.$$

证要: 设 $D=\mathrm{Hom}_A(M,M)$, 由于 M 不可约, 于是模仿定理 0.3.20(Wedderburn) 的证明可以知道 D 是除环,M 是除环 D 上的有限维左线性空间,D 是 K 上的有限维线性空间, 并且 $\dim_K M=(\dim_K D)(\dim_D M)$, 同时有 $A\cong\mathrm{Hom}_D(M,M)\cong M_n(D^{op})$, 其中 $n=\dim_D M$.

对 $a\in A$, 定义 $a_L: M\to M, a_L(x)=ax$, 显然映射 a_L 是域 K 上线性空间 M 的线性变换, 令 $B=\{a_L|a\in A\}$, 那么 B 也是域 K 上的代数, 且 $B\subset\mathrm{Hom}_K(M,M)$, 于是 B 是有限维的 K-代数, 映射 $a\mapsto a_L$ 给出了 A 到 B 的一个满代数同态. 不难知道 M 也是 B 上的左模 (此时 $a_Lx=a_L(x)=ax, a\in A, x\in M$), 并且也是不可约的. 若 $a_L\in\mathrm{ann}(M)$, 那么对一切 $x\in M$ 有 $a_L(x)=0$, 于是 a_L 是零线性变换, 这得出 M 在 B 上的零化子 $\mathrm{ann}(M)=0$, 于是 M 是忠实的不可约左 B-模, 据定理 0.5.19,B 是单代数.

对 M 到 M 的群同态 σ, 显然有 $\sigma(ax)=a\sigma(x)\Leftrightarrow\sigma(a_Lx)=a_L\sigma(x)$, 于是 $\mathrm{Hom}_B(M,M)=\mathrm{Hom}_A(M,M)=D$. 于是结合定理 0.3.20(Wedderburn) 我们得到 $B\cong\mathrm{Hom}_D(M,M)\cong M_n(D^{op})$, 其中 $n=\dim_D M$. 于是

$$\dim_K B=\dim_K(M_n(D^{op}))=\dim_K(D^{op})\dim_{D^{op}}(M_n(D^{op}))=\dim_K Dn^2.$$

必要性: 目的是证明 $\dim_K D = 1$.

设 M 绝对不可约, 取 K 的代数闭包 F, 那么 F 是代数闭域. 由绝对不可约知 M^F 是不可约左 A^F-模, 对 $a' \in A^F$, 于是易知 M^F 也是不可约左 B^F-模. 注意到 B^F 中的元素是 M^F 上的线性变换, 因此用与上一段同样的方法知 $\operatorname{ann}(M^F) = 0$, 即 M^F 是忠实的不可约左 B^F-模, 于是 B^F 是单代数, 令 $D^* = \operatorname{Hom}_{B^F}(M^F, M^F), s = \dim_{D^*} M^F$, 据 Wedderburn 定理:$B^F \cong \operatorname{Hom}_{D^*}(M^F, M^F) \cong M_s(D^{*op})$. 仍然利用与之前相同的理由得出 $\operatorname{Hom}_{A^F}(M^F, M^F) = \operatorname{Hom}_{B^F}(M^F, M^F) = D^*$. 注意到 M^F 是代数闭域 F 上的不可约左模, 并且 $\dim_F M^F = \dim_K^M < \infty$, 于是据 Schur 引理 (引理 0.3.24):$\operatorname{Hom}_{A^F}(M^F, M^F) \cong F$, 于是 $D^* \cong F$ 为域, 故 $D^{*op} = D^*$. 于是

$$\begin{aligned}
&\dim_K M = \dim_F M^F = \dim_{D^*} M^F = s \\
&\dim_K B = \dim_F B^F = \dim_{D^*}(M_s(D^{*op})) = \dim_{D^*}(M_s(D^*)) = s^2.
\end{aligned}$$

现在我们得到

$$s^2 = (\dim_K M)^2 = (\dim_K D)^2 (\dim_D M)^2 = (\dim_K D)^2 n^2 = (\dim_K D)^2 \frac{\dim_K B}{\dim_K D} = \dim_K D s^2.$$

故 $\dim_K D = 1$, 因此 $D \cong K$.

充分性: 设 $D = \operatorname{Hom}_A(M, M) \cong K$, 那么 $B \cong M_n(D^{op}) \cong M_n(K)$, 由于 M 是不可约左 B-模, 故 M 是不可约左 $M_n(K)$-模. 任取 K 的扩域 F, 那么 M^F 是左 A^F-模, 左 B^F-模也是左 $M_n(K)^F$-模. 易知 $M_n(K)^F = M_n(F)$, 于是 M^F 是左 $M_n(F)$-模. 现在

$$\dim_F M^F = \dim_K M = \dim_D M = n,$$

设 e_{11} 是 $(1,1)$ 元为 1 其余元为 0 的矩阵, 由于 $\dim_D(M_n(F)e_{11}) = n$, 于是有 F-线性空间同构 $M^F \cong M_n(F)e_{11}$, 容易验证这也是左 $M_n(F)$-模同构, 注意到 $M_n(F)e_{11}$ 是 $M_n(F)$ 的极小左理想, 故它是不可约左 $M_n(F)$-模, 于是 M^F 是不可约左 $M_n(F)$-模, 由于 $M_n(F) \cong M_n(K)^F \cong B^F$, 故 M^F 是不可约左 B^F-模, 于是 M^F 是不可约左 A^F-模. 故 M 是绝对不可约的.

推论 5.3.9 设 A 是代数闭域 K 上的有限维代数,M 是不可约左 A-模, 且 M 作为 K 上的向量空间是有限维的, 那么 M 是绝对不可约的.

证要: 由 Schur 引理 (引理 0.3.24):$\operatorname{Hom}_A(M, M) \cong K$. 由定理 5.3.8 即得结论.

推论 5.3.10 任意代数闭域都是任意有限群的分裂域.

证要: 设 K 是代数闭域,(φ, V) 是有限群 G 的不可约线性表示, 于是左 $K[G]$-模 V 是不可约的, 现在 $\dim_K V < \infty$(定理 2.2.2(1)), 于是据推论 5.3.9 可知 V 是绝对不可约的. 设有域扩张 F/K, 不难知道 $K[G]^F = F[G]$, 于是左 $K[G]^F$-模 (也就是左 $F[G]$-模)V^F 是不可约的, 这说明线性表示 (φ^F, V^F) 是不可约的, 于是 K 是群 G 的分裂域.

于是域 K 成为群 G 的分裂域的充要条件就出来了.

定理 5.3.11 设 G 是有限群, 域 K 满足 $\operatorname{char}K$ 不整除 $|G|$, 设 $K[G] = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s, A_i$ 为单环. 设 L_{i1} 为 $K[G]$ 的极小左理想且 $L_{i1} \subset A_i$, 令 $D_i = \operatorname{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1})$, 则 K 是 G 的分裂域当且仅当 $D_i \cong K, 1 \leq i \leq s$.

证要: 任取 G 的不可约表示 (φ, V) 与 K 的扩域 F. 由 (φ, V) 不可约知左 $K[G]$-模 V 同构于某个 L_{i1}. 于是只需证明每个 L_{i1} 都是绝对不可约的. 据定理 5.3.8, 这等价于 $\mathrm{Hom}_{K[G]}(L_{i1}, L_{i1}) \cong K$, 题设中有条件 $K \cong D_i = \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1})$, 于是只需证明:$\mathrm{Hom}_{K[G]}(L_{i1}, L_{i1}) = \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1})$.

由于 $A_i \subset K[G]$, 因此 $\mathrm{Hom}_{K[G]}(L_{i1}, L_{i1}) \subset \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1})$.

另一方面, 任取 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1})$, 任取 $x \in K[G]$, 设 $x = x_1 + \cdots + x_s$, 其中 $x_i \in A_i$, 定理 0.3.19 的证明过程告诉我们当 $i \neq j$ 时 $A_i A_j = 0$, 于是对任意 $a \in L_{i1} \subset A_i$ 有 $xa = x_i a, x\sigma(a) = x_i\sigma(a)$, 因此 $\sigma(xa) = \sigma(x_i a) = x_i\sigma(a) = x\sigma(a)$, 故 σ 实际上是左 $K[G]$-模同态, 于是 $\mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1}) \subset \mathrm{Hom}_{K[G]}(L_{i1}, L_{i1})$.

综合上面三段论述便知命题成立.